Основен вариант, 10.-12. клас

4.1. [2+2] Виж 3.2.

4.2. [6] Диагоналите на вписан четириъгълник се пресичат в точка P. Нека K, L, M, N са средите на страните на четириъгълника. Докажете, че радиусите на описаните окръжности на триъгълниците PKL, PLM, PMN и PNK са равни.

Решение. Нека K, L, M, N са средите съответно на страните AB, BC, CD, AD на четириъгълника $ABCD$. Триъгълниците BAP и CDP са подобни (по два ъгъла), следователно са подобни и триъгълниците KAP и MDP. Оттук $\angle APK = \angle DPM$. Тъй като $KL||AC$ и $ML||BD$ (като средни отсечки в ABC и BCD), получаваме $\angle LKP = \angle APK = \angle DPM = \angle LMP$. От равенството $\angle LKP = \ LMP$ по синусовата теорема следва, че са равни радиусите на описаните окръжности на триъгълниците PKL и PLM. Аналогично следват и останалите равенства.

4.3. [6] Намерете всички крайни аритметични прогресии със сбор 1, всеки член на които е от вида $\frac{1}{k}$, където k е естествено число.

Решение. Като умножим всеки член на редицата с НОК на знаменателите, ще получим растяща аритметична прогресия $\{a_i\}$ от n естествени числа, чиято сума S се дели на всеки член на редицата. Най-големият общ делител на членовете на тази редица е 1 и следователно разликата d е взаимно проста с всеки член на редицата.

Ще разгледаме два случая.

1) $n = 2m$. Тогава $S = \dfrac{n(a_m + a_{m+1})}{2} = na_{m+1} - md$, откъдето md, а следователно и m, е кратно на a_{m+1}. Но това е невъзможно, тъй като $a_{m+1} > m$.

2) $n = 2m + 1$. Тогава $S = na_{m+1} = na_m + nd$, откъдето $n = 2m + 1$ е кратно на a_m. Но тъй като $a_m \geq m$, това е възможно само при $a_m = m$ и $m = 1$. Оттук получаваме единственият отговор: $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

4.4. [6] Виж 3.5.

4.5. [4+4] Очите на фокусника са завързани, докато един от зрителите подрежда N еднакви монети в редица – някои в положение 'ези', останалите 'тура'. Помощникът на фокусника моли зрителя да запише естествено число от 1 до N на лист и да го покаже на публиката. Виждайки числото, помощникът избира една монета от редицата и я преобръща. Тогава развързват очите на фокусника, той поглежда редицата и познава избраното от зрителя число.

а) Докажете, че ако фокусникът и неговият помощник имат метод за познаване на избраното число за $N = a$ и за $N = b$, то съществува метод и за $N = ab$.

б) Намерете всички стойности на N, за които такъв метод съществува.

Решение. а) Фокусникът и помощникът предварително записват целите числа от 1 до ab в таблица $a \times b$ и на числото в i-тия ред и j-тия стълб съпоставят двойката (i, j), като $1 \leq i \leq a$ и $1 \leq j \leq b$. За да познае числото, фокусникът трябва да знае съответната двойка (i, j).

Ето как може да постъпи фокусникът. Мислено разполага монетите в таблица $a \times b$ и записва вляво от всеки ред *ези*, ако там има четен брой 'ези' и *тура* в обратен случай. Така получава наредба на a ези и тура, която съответства на число i от 1 до a. По същото правило той пише *ези* или *тура* под всеки стълб и получава наредба от b ези и тура, която която съответства на число j от 1 до b. По таблицата $a \times b$ с числата от 1 до ab фокусникът определя числото в i-тия ред и j-тия стълб.

Ето съответните действия на помощника. По същия начин мислено записва наредбата от a ези и тура и наредбата от b ези и тура. Нека избраното от зрителя число се намира в i-тия ред и j-тия стълб на таблицата $a \times b$ с числата от 1 до ab. За да съобщи i по начина за a монети, помощникът трябва да промени k-тата позиция вляво от таблицата. За да съобщи j, трябва да промени l-тата позиция под таблицата. Тогава той преобръща монетата в k-тия ред и l-тия стълб на таблицата.

б) При $N = 1$ твърдението е очевидно. При $N = 2$ на числото 1 съответства ези, а на 2 - тура на лявата монета. От (а), при $a = b = 2$, ще получим начин за $N = 4$. По индукция следва, че има начин за всяко $N = 2^m$.

Доказателството, че при други N няма начин за познаване, вижте в решението на задача 3.6 б).

4.6. [8] В равнината са дадени два изпъкнали многоъгълника P и Q. За всяка страна на P можем да построим две успоредни на на нея прави така, че Q да е между тях. Означаваме с h минималното разстояние между тези прави, с l дължината на избраната страна и пресмятаме lh. Сумираме получените поизведения за всички страни на P и получаваме (P,Q). Докажете, че $(P,Q) = (Q,P)$.

Решение. Ще докажем, че ако a_i са страните на P, b_j са страните на Q, а ϕ_{ij} е ъгълът между a_i и b_j, то

$$(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_i b_j sin\phi_{ij} = (Q,P).$$

Фиксираме страна a_i, ограничаваме Q между две успоредни на нея прави и избираме върхове C и D от Q върху тях. Границата на Q се разбива на две начупени линии с краища C и D. Проекцията на такава начупена линия върху права m, перпендикулярна на a_i, е сбор от проекциите на частите на начупената линия. Следователно проекцията на Q върху m се покрива от проекциите на страните на Q точно по два пъти. Това означава, че сборът от дължините на проекциите е равен на удвоеното разстояние h_i между правите, ограничаващи Q. Проекцията на b_i върху m е равна на $b_i \cos(90^o - \phi_{ij}) = b_i \sin\phi_{ij}$. Тогава $2h_i = \sum_j b_j \sin\phi_{ij}$, а $a_i h_i = \frac{1}{2}\sum_j a_i b_j \sin\phi_{ij}$. Като сумираме по i, получаваме желаната формула.

4.7. [3+5] Пред Алекс има 100 затворени кутии, всяка от които съдържа червена или синя топка. Алекс има един лев в своята сметка. Той избира някоя затворена кутия и един от двата цвята и залага някаква сума, не превишаваща тази в сметката му (няма изискване да се залага цяло число стотинки). Кутията се отваря и сметката на Алекс се увеличава или намалява със заложената сума в зависимост от това дали е вярна или не неговата прогноза. Играта продължава докато се отворят всички кутии. Каква максимална сума може да си гарантира Алекс, ако му е известно че

а) има само една синя топка;

б) броят на сините топки е равен на n.

(Алекс може да заложи 0, като по този начин безплатно ще види цвета на топката в избраната кутия.)

Отговор. а) $\dfrac{2^{100}}{100}$. б) $\dfrac{2^{100}}{C_n^{100}}$

Решение. б) Да разгледаме общия случай. Алекс знае, че има m червени и n сини топки в $m + n = K$ кутии. Нека тогава залага $\dfrac{|n-m|}{K}$-та част от капитала си на този цвят, който е повече (при $m = n$ Алекс нищо не залага). Ще докажем с индукция по K, че по този начин Алекс ще увеличи капитала си $\dfrac{2^K}{C_n^K}$ пъти.

За една кутия твърдението е очевидно; капиталът се увеличава 2 пъти. Ако твърдението е вярно за $K-1$, ще го докажем за K кутии. Нека за определеност $m \le n$.

Ако е отворена кутия със синя топка, на тази стъпка капиталът се увеличава $1 + \dfrac{n-m}{K} = \dfrac{2n}{K}$ пъти, като остават $n-1$ сини кутии от $K-1$ кутии, което според индукционното предположение води до увеличение $\dfrac{2^{K-1}}{C_{n-1}^{K-1}}$ пъти. Като умножим тези числа и вземем предвид, че $\dfrac{K}{n}C_{n-1}^{K-1} = C_n^K$, получаваме желаното $\dfrac{2^K}{C_n^K}$.

Ако е отворена кутия с червена топка, капиталът се намалява, като се умножава с $1 - \dfrac{n-m}{K} = \dfrac{2m}{K}$, а остават n сини топки и $K-1$ кутии. По индукция, в този случай увеличението е $\dfrac{2^{K-1}}{C_n^{K-1}}$ пъти. Като умножим и вземем предвид, че $\dfrac{K}{m}C_n^{K-1} = \dfrac{K}{m}C_{m-1}^{K-1} = C_m^K = C_n^K$ отново получаваме желаното увеличение.

С индукция по K ще покажем, че по-голямо увеличение не е възможно. За една кутия това е очевидно. Ако кутиите са повече и Алекс заложи на синия цвят по-голяма част от посочената в алгоритъма, при отваряне на червена топка той ще получи по-малко, отколкото по алгоритъма. А ако заложи по-малка част от посочената в алгоритъма (включително и отрицателна, ако залага на червено), ще получи по-малко, отколкото по алгоритъма при отваряне на кутия със синя топка.