Основен вариант, 7.-9. клас

3.1. [5] На страната CD на ромб $ABCD$ е взета точка K, за която $AD = BK$. Нека F е пресечната точка на диагонала BD и симетралата на страната BC. Докажете, че точките A, F и K лежат на една права.

Решение. Трапецът $ABKD$ е равнобедрен. Пресечната точка G на диагоналите му лежи на симетралата на основата AB. Точката G лежи и на диагонала BD, който е симетрала на AC. Следователно G лежи също и на симетралата на BC, т.е. съвпада с точка F.

3.2. а) [3] Петър и Васко си намислили по три естествени числа. Петър пресметнал най-голямия общ делител на всеки две от своите числа и получените резултати записал на дъската. Васко пресметнал най-малкото общо кратно на всеки две от неговите числа и също записал получените резулатати. Оказало се, че Васко и Петър са записали едни и същи числа. Докажете, че всички записани на дъската числа са равни.

б) [3] Ако Петър и Васко са намислили по четири числа, при същата постановка на задачата ще бъде ли вярно и същото заключение?

Решение. а) Нека Петър и Васко са записали a, b и c. Най-големите общи делители на всеки две от тези числа са равни: това е най-големия общ делител d на трите числа, избрани от Петър. От друга страна, свеки такъв общ делител се дели на едно от числата, избрани от Васко. Значи d се дели на най-малкото общо кратно на избраните от Васко числа, което е равно на НОК(a, b, c). Следователно НОК$(a, b, c) =$ НОД(a, b, c), т.е. $a = b = c$.

Забележка. Не е задължително да съвпадат и избраните числа, например Васко може да избере 2, 3 и 6, а Петър 6, 12 и 18.

б) Не, такова заключение не е вярно. Например, ако Петър избере числата $6, 10, 15, 30$, а Васко - числата $1, 2, 3, 5$, то и двамата ще запишат $2, 3, 5, 6, 10, 15$. (Такива примери има много: ако Васко избере четири две по две взаимно прости числа a, b, c, d, а Петър избере abc, abd, acd, bcd, то и двамата ще запишат ab, ac, ad, bc, bd, cd.)

3.3. [6] Мишо стои в центъра на локва с форма на кръг с радиус 100 м. Всяка минута той прави крачка с дължина 1 м. Преди всяка крачка Мишо съобщава на Ели избраната от него посока. Ели може да го принуди да направи крачка в противоположната на избраната от него посока. Може ли Мишо да действа така, че в някакъв момент да излезе от локвата, или Ели може винаги да му попречи?

Отговор. Може.

Решение. От втората стъпка нататък, Мишо всеки път може да избира посока, перпендикулярна на отсечката, свързваща центъра O на локвата и точката, в която се намира в момента. Нека Мишо е направил крачка от точка A, където $OA = \sqrt{a}$, към точка B. По Питагоровата теорема $OB = \sqrt{a+1}$. По този начин след n-тата крачка Мишо ще се намира на разстояние $\sqrt{n}$ м от центъра. След 10001 крачки Мишо ще излезе от локвата.

3.4. [7] Дадена е карирана ивица $1 \times N$. На всеки ход първият от двама играчи слага кръстче в някое свободно квадратче, а вторият слага нула. Не се разрешава в две съседни квадратчета да има две кръстчета или две нули. Играчът губи, когато не може да направи ход. Кой от двамата играчи има печеливша стратегия?

Решение. При $\mathrm{N} = 1$ печели първият, а в останалите случаи – вторият. Неговата стратегия е да направи първи ход в крайно квадратче, а след това да играе по произволен начин. След k-тия ход на първия кръстчетата разделят ивицата на най-малко k части, състоящи от празни полета и нули. Тъй като до този момент са поставени само $k-1$ нули, то в поне една част няма нула и там може да играе втория.

3.5. [8] Няколко тежести са претеглени и масите им са записани на етикетчета. Тези етикетчетата са залепени по произволен начин на тежестите. Разполагаме с везна с форма на отсечка, закрепена в средата си. Тежестите се прикачават в произволни точки от тази отсечка, като се отчита дали везната е в равновесие или не. Може ли с едно претегляне да се установи дали всички етикетчета са залепени правилно? (Везната е в равновесие, когато сборът от моментите на тежестите отляво на средата и отдясно на средата е един и същ; иначе се накланя в посока на по-големия сбор. Моментът на тежестта е произведение на масата m и разстоянието от центъра s.)

Отговор. Може.

Решение. Ще използваме пермутационното неравенство: ако $A_1 < \cdots < A_n$ и $B_1 < \cdots B_n$ са наредени n-орки, и $C_1, \ldots, C_n$ е пермутация на числата $B_1, \ldots, B_n$, то $A_1C_1 + \cdots A_nC_n \leq A_1B_1 + \cdots + A_nB_n$, като равенство се достига само при $C_1 = B_1, \ldots, C_n = B_n$. Нека най-леката тежест е m. Останалите тежести ще закрепим вляво от средата така, че колкото по-голяма е масата, толкова по-голямо е разстоянието от средата. Пресмятаме в коя точка трябва да се прикачи тежестта m, за да уравновеси останалите (тази точка няма да излезе от отсечката, ако гирите отляво се окачат достатъчно близо до средата). Ще покажем, че ако етикетчетата са разбъркани, не може да има равновесие. Наистина, ако са разбъркани само етикетчетата отляво, по пермутационното неравенство няма равновесие. Ако освен това са разменени етикетчетата на тежестта m и някоя тежест отляво, то моментът отдясно ще се увеличи, а отляво допълнително ще се намали.

3.6. Очите на фокусника са завързани, докато един от зрителите подрежда N еднакви монети в редица – някои в положение 'ези', останалите 'тура'. Помощникът на фокусника моли зрителя да запише естествено число от 1 до N на лист и да го покаже на публиката. Виждайки числото, помощникът избира една монета от редицата я преобръща. Тогава развързват очите на фокусника, той поглежда редицата и познава избраното от зрителя число.

а) [4] Докажете, че ако фокусникът и неговият помощник имат метод за познаване на избраното число за $N = a$, то съществува метод и за $N = 2a$.

б) [5] Намерете всички стойности на N, за които такъв метод съществува.

Отговор. б) $N = 2^m$.

Решение. а) Нека фокусникът мислено разположи монетите в полетата на таблица $2 \times a$ и запише под всеки стълб от две полета *ези*, ако монетите са в едно и също положение, и *тура* в обратен случай. Тази комбинаця му съобщава число n от 1 до a. Ако в горния ред има четен брой 'тура', той казва n, иначе казва $n + a$.

Нека зрителят е избрал числото m. За да го предаде, помощникът също мислено записва реда от *ези* и *тура* по същото правило. Той може да измени едно от тези положения, за да предаде числото m (при $m \leq a$) или $m - a$ (при $m > a$): достатъчно е да преобърне коя да е от монетите в съответния стълб. С избора на горния или долния ред той осигурява нужната четност на броя 'тура' в горния ред.

б) Нека фокусникът и помощникът имат такъв метод за N. Начините за наредба на N монети са 2^N. Да разгледаме произволна наредба, която може да се падне на помощника. Като се промени в нея положението на една монета, се получават точно N други наредби. Всяка от тези N наредби означава за фокусника число от 1 до N (тъй като има N възможности за избраното от зрителя число). Да запишем към всяка наредба числото, което тя означава. По този начин ще се запише число към всяка от 2^N-те наредби, тъй като всяка от тях може да се получи от някоя друга по описания начин.

Да преброим към колко наредби е записано числото 1. От всяка от 2^N-те наредби може да се получи точно по една наредба, към която е записано 1. Така получаваме 2^N наредби, към които е записано 1, като всяка е броена по N пъти (тъй като всяка комбинаця може да се получи от точно N други). Следователно 1 е записано към $\dfrac{2^N}{N}$ наредби. Тъй като това число е цяло, то N е степен на двойката.

За степените на двойката методът следва по индукция от а) (тъй като за $N = 1$ е очевиден).

3.7. [9] Вова решил да стане велик писател. На всяка буква от азбуката той съпоставил дума, която съдържа тази буква. Първо записал думата, съответстваща на буквата А. След това вместо всяка буква в тази дума той записал думата, която и съответства (като разделил думите с интервали). В получения текст отново заменил всяка буква със съответната и дума. След като извършил тази операция 40 пъти, неговият текст започвал така: "Ред кораби на дремещи моряци". Докажете, че тази фраза се среща още поне веднъж в текста.

Решение. Нека T_k е текстът след k операции. Да отбележим, че в нито един текст до T_{40} първата буква не би могла на следващата стъпка да премине в еднобуквена дума (иначе и по-нататък първата дума ще е еднобуквена). Следователно, всеки път текстът се е удължавал с поне една буква.

Освен това, в T_1 буквата А не е първа (иначе всички текстове ще започват с А). Тъй като в T_1 има буква А, която не е в началото, то T_2 съдържа (също не от началото) получения от тази буква А текст T_1. Аналогично, T_3 съдържа текста T_2, получен от текста T_1 в T_2 . Но тогава T_3 съдържа и T_1. По същия начин виждаме, че във всеки текст се съдържат (не от началото) всички предишни текстове.

Тъй като в българската азбука има 30 букви, още измежду първите 31 текста ще има два с една и съща първа буква. Нека първото повторение е буквата L на k-то място, където $k \leq 31$. Тогава в T_k буквата L е първа и T_k съдържа и този текст, в който L се е срещнала за първи път. От T_k до T_{39} има поне 8 операции, и от L в T_{39} ще се получат най-малко 8 първи букви, а в T_{40} - най-малко 8 първи думи. Следователно в T_{40} от първата буква L ще се получи текст, който започва с "Ред кораби на дремещи моряци". Но същият текст ще се получи от втората буква L в T_k.