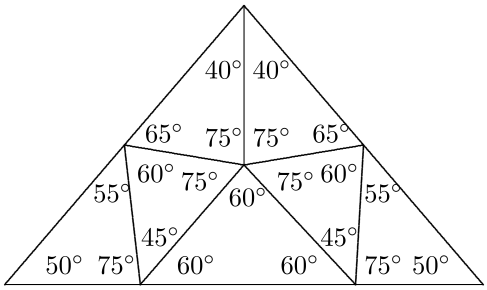
Основен вариант за 10. – 12. клас

Задача 1. *Хартиен триъгълник, един от ъглите на който е равен на α, разрязали на няколко триъгълника. Възможно ли е всички ъгли на всички получени тръгълници да са по-малки от α, ако*
а) $\alpha = 70^\circ$;   б) $\alpha = 80^\circ$?

Решение. а) Да допуснем, че такова разрязване е възможно. В получените триъгълници не може да има ъгъл, по-малък или равен на 40°, защото поне един от другите два ъгъла в такъв триъгълник е по-голям или равен на $\frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$. Следователно ъглите на триъгълниците от разрязването са по-големи от 40° и по-малки от 70°. Но даденият ъгъл 70° не може да се нареже на ъгли, по-големи 40°. Противоречие.

б) Пример за такъв триъгълник е показан на чертежа.



Задача 2. *В точка P на числовата права стои скакалец-точка. Точките 0 и 1 са капани. Преди всеки скок на скакалеца ние избираме произволно положително число X, след което скакалецът скача на разстояние X наляво или надясно (по свой избор). През цялото време виждаме къде се намира скакалеца. При кои P можем да избираме числата така, че със сигурност да вкараме скакалеца в капан, където и да се е намирал първоначално и както и да определя посоките за скачане?*

Решение. Ще докажем, че ако точката от числовата права съответства на обикновена дроб със знаменател степен на двойката, скакалецът ще попадне в капан.

Нека $P = \dfrac{a}{2^k}$, където a и k са естествени числа и a е нечетно в интервала $(0, 2^k)$. Преди всеки ход ще избираме число, равно на по-малкото от разстоянията, делящи скакалеца от капаните. В началото тези разстояния са P и $1-P$ и всяко от тях е несъкратима обикновена дроб със знаменател 2^k. Ако след първия скок скакалецът не попадне в капан, то той ще остане между капаните, като разстоянието между него и един от капаните ще се удвои. Следователно знаменателят на координатата на скакалеца ще стане 2^{k-1}. След k скока (ако дотогава скакалецът не попадне в капан) тази координата ще стане цяло число, което означава попадане в капан.

Да наречем капани и всички правилни обикновени дроби със знаменател степен на двойката. Ясно е, че по средата между два капана също има капан. Ще покажем, че ако в началото скакалецът не се намира в капан, той винаги може да скочи така, че да избегне капаните. Наистина, нека е избрано число d и скакалецът се намира в P. Тъй като P не е капан и е по средата между $P-d$ и $P+d$, то поне една от точките $P+d$ и $P-d$ не е капан; натам е спасителният скок на скакалеца.

Задача 3. *Многочлен от степен $n > 1$ има n различни корена e_1, e_2, $\ldots$, e_n. Корените на производната му са y_1, y_2, $\ldots$, y_{n-1}. Докажете неравенството*

$$\frac{e_1^2+\cdots+e_n^2}{n} > \frac{y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2}{n-1}.$$

Решение. Нека многочленът с корени e_1, e_2, $\ldots$, e_n е

$$P(x) = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - a_3x^{n-3} + \cdots .$$

По формулите на Виет имаме

$$\begin{aligned} a_1 &= e_1+e_2+\cdots+e_n \\ a_2 &= e_1e_2+e_1e_3+\cdots+e_{n-1}e_n \end{aligned}$$

и изразяваме $e_1^2+e_2^2+\cdots+e_n^2 = a_1^2-2a_2$. За корените на производната

$$P'(x) = nx^{n-1} - (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} - (n-3)a_3x^{n-4} + \cdots$$

отново по формулите на Виет получваме

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n}a_1 &= y_1+y_2+\cdots+y_{n-1} \\ \frac{n-2}{n}a_2 &= y_1y_2+y_1y_3+\cdots+y_{n-2}y_{n-1}. \end{aligned}$$

Изразяваме

$$\begin{aligned}
y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2 &= \frac{(n-1)^2}{n^2}a_1^2-2\frac{n-2}{n}a_2\\
&= \frac{(n-1)^2}{n^2}(e_1+e_2+\cdots+e_n)^2-\\
&- \frac{n-2}{n}((e_1+e_2+\cdots+e_n)^2-(e_1^2+e_2^2+\cdots+e_n^2))\\
&= \frac{1}{n^2}(e_1+e_2+\cdots+e_n)^2+\frac{n-2}{n}(e_1^2+e_2^2+\cdots+e_n^2).
\end{aligned}$$

Като заместим $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2$ в даденото неравенство и преобразуваме, получаваме, че то е еквивалентно на

$$\frac{e_1^2+\cdots+e_n^2}{n}>\frac{1}{n^2}(e_1+e_2+\cdots+e_n)^2,$$

а това е известното неравенство между средно-аритметично и средно-квадратично (и е строго, когато числата са различни).

Задача 4. *Петър и Васко начертали по един четириъгълник без успоредни страни. Всеки от двамата построил по един диагонал в своя четириъгълник и измерил ъглите, образувани от този диагонал и страните на четириъгълника. Петър получил ъгли α, α, β и γ (в някакъв ред), и Васко получил същите ъгли, евентуално в друг ред. Докажете, че ъглите между диагоналите в четириъгълника на Петър са същите като ъглите между диагоналите в четириъгълника на Васко.*

Решение. Има два принципно различни четириъгълника, които удовлетворяват условието – или равните ъгли имат общ връх, или са с върхове краищата на диагонала и са в една и съща полуравнина относно този диагонал. Нека в четириъгълниците $ABCD$ и $AECF$ с общ диагонал имаме

$$\sphericalangle CAB=\sphericalangle CAD=\alpha,\ \sphericalangle BCA=\beta,\ \sphericalangle DCA=\gamma,$$

а във втория

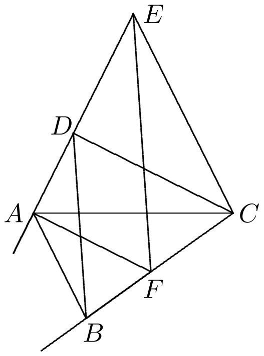
$$\sphericalangle ACE=\sphericalangle CAE=\alpha,\ \sphericalangle ACF=\beta,\ \sphericalangle CAF=\gamma$$

(точката E лежи на правата AD, а точката F – на BC).

Тогава $AB||EC$ и $AF||DC$. Ще докажем, че диагоналите DB и EF също са успоредни. Нека O е пресечната точка на AD и BC. От $AB||EC$ следва, че $\dfrac{OA}{OE} = \dfrac{OB}{OC}$;

от $AF||DC$ следва, че $\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{OF}{OC}$.

Следователно $\dfrac{OB}{OF} = \dfrac{OD}{OE}$, което означава, че диагоналите DB и EF са успоредни и сключват равни ъгли с общия диагонал AC.



Коментар. Бяха получени още две принципно различни решения на задачата. Александър Куртенков е предложил тригонометрично решение. Емил Лалов е разгледал конфигурация, при която двата четириъгълника имат обща страна.

Задача 5. *В редица $a_1, a_2, \dots$ са записани всички естествени числа в някакъв ред, като всяко естествено число е записано точно един път. Може ли със сигурност да се твърди, че съществуват няколко последователно записани числа $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n}$, $n \geq 1$, чийто сбор е просто число?*

Решение. Ще покажем как могат да се запишат естествените числа в безкрайна редица така, че да няма прости сборове от последователни членове на редицата.

Избираме $a_1 = 1$ и $a_2 = 3$. Нека е построена крайна редица $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(n > 1)$ без "прости сборове" и нека m е най-малкото естествено число, което не се среща в редицата. Тя може да бъде продължена, като положим

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + m, \qquad a_{n+1} = S!, \qquad a_{n+2} = m.$$

В новата редица също няма "прости сборове защото всеки сбор, който включва a_{n+1} е от вида $S! + k$, където $1 < k \leq S$ и не е просто число, тъй като се дели на k. От това индуктивно построение е очевидно, че всяко естествено число се среща в редицата точно веднъж.

Задача 6. *Завързали очите на единадесет мъдреци и на главата на всеки сложили шапка в един от 1000 възможни цвята. След като развързали очите на мъдреците, всеки видял шапките на останалите, но не и своята. Тогава едновременно всеки мъдрец показал на останалите бяла или зелена карта. Възможно ли е след това всички едновременно да познаят цвета* *на своята шапка? (Мъдреците могат да се договарят преди да им завържат очите и знаят кои са възможните 1000 цвята.)*

Решение. Да разгледаме редиците от 0 и 1 с дължина 11, във всяка от които има четен брой единици. Първите 10 члена на такава редица могат да се изберат произволно, а последният член се определя еднозначно така, че общият брой единици да е четно число. Следователно съществуват точно $2^{10} = 1024$ такива редици. Да изберем 1000 от тези редици и да съпоставим на всеки цвят по една редица. Мъдреците знаят на кой цвят коя редица съответства. Тогава първият мъдрец, виждайки цветовете на останалите 10, разглежда редиците, които съответстват на тези 10 цвята. Ако измежду първите членове на тези 10 редици има четен брой единици, той показва бяла карта, ако този брой е нечетен, той показва зелена карта. Вторият мъдрец преброява единиците измежду вторите членове на редиците, които вижда и показва бяла карта, ако този брой е четен и зелена в противен случай. Мъдрец номер k преброява единиците измежду k-ите членове на редиците, които вижда и показва бяла карта, ако този брой е четен и зелена в противен случай.

Ще покажем как първият мъдрец може да познае редицата, която му съответства. Той преброява единиците измежду вторите членове на редиците на всички мъдреци от 3 до 11 включително. По картата на втория мъдрец той знае каква е четността на броя на единиците измежду вторите членове на неговата редица и на редиците на всички мъдреци от 3 до 11 включително. Следователно той може да определи втория член на редицата си. По същия начин определя и останалите (без първия) членове на редицата си. Тъй като в редицата му има четен брой единици, той може да определи и първия и член.

Всеки от останалите определя съответната му редица по същия начин.

Задача 7. *Дадени са две окръжности и три прави. Всяка права определя при пресичането си с двете окръжности равни хорди. Пресечните точки на правите са върхове на триъгълник. Докажете, че описаната около този триъгълник окръжност минава през средата на отсечката, свързваща центровете на дадените окръжности.*

Решение. Да разгледаме окръжности k_1 и k_2 с центрове съответно O_1 и O_2. Нека една от правите пресича k_1 в точки A и B, а k_2 – в точки C и D, като $AB = CD$. Да означим средата на O_1O_2 с P, а ортогоналната проекция на P върху правата с Q. Ако X и Y са средите съответно на AB и CD, имаме

$XQ = QY$ и от $XB = CY$ получаваме $QB = QC$. Следователно

$$QB.QA = QB(QB + BA) = QC(QC + CD) = QC.QD.$$

Следователно степените на Q спрямо двете окръжности са равни, т.е. Q лежи на радикалната ос на двете окръжности.

Аналогично се доказва, че проекциите на P върху другите две прави лежат на радикалната ос на k_1 и k_2.

Остана да използваме, че ако проекциите на точка върху трите страни на триъгълник лежат на една права, то тази точка лежи на описаната около този триъгълник окръжност (тази права се нарича права на Симсън за съответната точка).