Основен вариант за 7. – 9. клас

Задача 1. *Числото N е произведение на две последователни естествени числа. Докажете, че*
а) отдясно на числото могат да се припишат две цифри така, че да се получи точен квадрат;
б) ако $N > 12$, това може да стане по единствен начин.

Решение. а) Смисълът на известното тъждество

$$100n(n+1) + 25 = (10n+5)^2$$

е, че ако към произведението $N = n(n+1)$ припишем отдясно 25, ще получим квадрата на числото $10n + 5$.

б) Ако $N > 12$, т.е. $n(n+1) > 12$, то $n \geq 4$. Числото X, което е получено с приписване на две цифри отдясно на N, се намира в интервала

$$100n(n+1) \leq X < 100n(n+1) + 100. \tag{1}$$

Ще покажем, че в този интервал при $n \geq 4$ единственият точен квадрат е $100N + 25 = (10n+5)^2$. За целта да разгледаме най-близките до $(10n+5)^2$ точни квадрати – това са $(10n+4)^2$ и $(10n+6)^2$. Имаме

$$(10n+4)^2 = 100n^2 + 80n + 16 < 100n^2 + 100n = 100n(n+1),$$

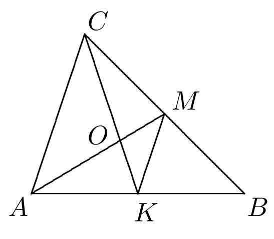
т.е. този квадрат е наляво от интервала (1). (Използвахме, че $16 < 20n$ при $n \geq 4$.) Също

$$(10n+6)^2 = 100n^2 + 120n + 36 > 100n^2 + 100n + 100 = 100n(n+1) + 100,$$

т.е. този квадрат е надясно от интервала (1) (като използвахме, че $20n > 64$ при $n \geq 4$). Така твърдението на задачата е доказано.

Задача 2. *На страните AB и BC на $\triangle ABC$ са избрани съответно точки K и M така, че $KM || AC$. Отсечките AM и KC се пресичат в точка O. Ако е известно, че $AK = AO$ и $KM = MC$, докажете, че $AM = KB$.*

Решение. От условието, че триъгълниците AKO и KCM са равнобедрени и от успоредността на KM и AC следват равенствата:



$$\sphericalangle COM = \sphericalangle AOK = \sphericalangle AKO$$
$$\sphericalangle KCM = \sphericalangle CKM = \sphericalangle ACK$$

Тогава изразяваме

$$\sphericalangle AMC = 180^o - \sphericalangle COM - \sphericalangle KCM = 180^o - \sphericalangle AKC - \sphericalangle CKM = \sphericalangle BKM.$$

Като отбележим равенството на съответните ъгли $\sphericalangle BMK = \sphericalangle BCA$ и условието $MC = KM$, получаваме, че триъгълниците AMC и BKM са еднакви. Следователно $AM = KB$.

Задача 3. *Дадена е карирана ивица (с широчина едно квадратче), безкрайна и в двете посоки. Две квадратчета от ивицата са капани. Между капаните има N квадратчета, а в едно от тях стои скакалец. Преди всеки скок на скакалеца ние избираме произволно естествено число X, след което скакалецът скача на X квадратчета наляво или надясно (по свой избор). През цялото време виждаме къде се намира скакалеца. При кои N можем да избираме числата така, че със сигурност да вкараме скакалеца в капан, където и да се е намирал първоначално и както и да определя посоките за скачане?*

Решение. Ще докажем, че при $N = 2^k - 1$ скакалецът винаги може да се вкара в капан. Разглеждаме целочислена номерация на квадратчетата, при която капаните имат номера 0 и $N + 1$. Ако скакалецът се намира между капаните в квадратче с номер x, то разстоянията до капаните са равни на x и $N - x$.

Нека $N + 1 = 2^k$. Ще покажем, че ако преди всеки скок избираме число, равно на разстоянието d до най-близкия капан, скакалецът ще се хване в капан. Тъй като $d \in [1, 2^{k-1} - 1]$, то най-голямата степен на двойката, на която се дели d, е по-малка от $k-1$. Ако скакалецът скочи в противоположна на най-близкия капан посока, той ще остане между капаните (тъй като другият капан е по-далече). Новите разстояния до капаните са $2d$ и $2^k - 2d$, като и двете се делят на по-висока степен на двойката, отколкото d. Като продължаваме по този начин, ще стигнем до момент, когато и двете разстояния се делят на 2^k, което означава, че те са 0 и 2^k, т.е. скакалецът е попаднал в капан.

Нека $N + 1 = 2^k t$, където t е нечетно число, по-голямо от 1 (степента k може да е равна и на 0). Капани ще нарчиаме всички квадратчета с кратни на t номера. Ако в даден момент скакалецът не стои в капан, то той не е и по средата между два капана (средата между капаните at и bt е $\dfrac{(a+b)t}{2}$ или е капани, или не е цяло число). Това означава, че при произволно избрано от нас число скакалецът може да направи скок, избягвайки капан.

Така доказахме, че само при N от вида $2^k - 1$ имаме стратегия за улавяне на скакалеца.

Коментар. Повечето участници са забелязали, че при $N = 2^k - 1$ скакалецът може да бъде вкаран в капан. За пълнота на решението трябва да се обясни и защо в останалите случаи скакалецът има спасителна стратегия.

Задача 4. *Краен брой точки в равнината са оцветени в четири цвята, като има точки от всеки цвят. Никои три точки не лежат на една права.* ***Интересен*** *наричаме триъгълник със следните свойства:*
(1) върховете му са точки, оцветени в три различни цвята;
(2) вътре в триъгълника няма оцветени точки.
Докажете, че съществуват три интересни триъгълника (които може да се пресичат).

Решение. Да разгледаме множеството M_1 от триъгълници, които изпълняват свойство (1). Нека $\triangle_1$ е триъгълник с минимално лице в M_1. Ако съществува оцветена точка, която е вътрешна за $\triangle_1$, тя е разноцветна с поне два от върховете му и заедно с тези два върха образува триъгълник от M_1, който е с по-малко лице от $\triangle_1$. Полученото противоречие с избора на $\triangle_1$ означава, че няма оцветена точка, вътрешна за $\triangle_1$, т.е. $\triangle_1$ удовлетворява и свойство (2) и е интересен триъгълник. Нека цветовете на върховете му са 1, 2 и 3.

Да разгледаме множеството M_2 от триъгълници, които удовлетворяват свойство (1) и имат връх с цвят 4. Нека $\triangle_2$ е триъгълник с минимално лице в M_2. Без ограничение приемаме, че върховете на $\triangle_2$ са оцветени в цвят 1, 2 и 4. Да допуснем, че съществува вътрешна за $\triangle_2$ точка X от цвят:

- 1, 2 или 4. Триъгълникът с върхове X и двата разноцветни за X върха на $\triangle_2$ е от множеството M_2 и лежи в $\triangle_2$, т.е. е с по-малко лице от $\triangle_2$;

- 3. Триъгълникът с върхове X и оцветените в цвят 1 и 4 върхове на $\triangle_2$ е от множеството M_2 и е с по-малко лице от $\triangle_2$.

И в двата случая получихме противоречие с избора на $\triangle_2$; следователно $\triangle_2$ удовлетворява свойство (2) и е вторият намерен интересен триъгълник.

Накрая, да разгледаме множеството M_3 от триъгълници, притежаващи свойство (1), които имат върхове в цвят 3 и 4. В триъгълника $\triangle_3$ с минимално лице в M_3 не може да има оцветена точка Y от цвят:

- 1 или 2, защото Y и оцветените в цвят 3 и 4 върхове на $\triangle_3$ ще образуват триъгълник от M_3, който се съдържа в $\triangle_3$;

- 3 или 4, защото Y и разноцветните на Y върхове на $\triangle_3$ ще образуват триъгълник от M_3 с по-малко лице от $\triangle_3$.

Така намерихме и третия интересен триъгълник.

Задача 5. *В кръг са застанали 99 деца, като първоначално всяко дете държи топка. Всяка минута всяко дете подхвърля топката си към някой от двамата си съседи. Ако към някое дете едновременно са хвърлени две топки, едната се загубва безвъзвратно. Най-малко след колко минути децата могат да останат само с една топка?*

Решение. Ще докажем, че най-малко след 98 минути в играта може да остане само една топка (като топката се подхвърля в края, а не в началото на съответната минута). Номерираме децата и топките от 1 до 99 в посока на часовниковата стрелка.

Ще покажем как да остане само една топка след 98 минути. При първия, третия и всеки следващ нечетен ход първата топка се подава от първото дете към второто, а на всеки четен ход – от втрото дете към първото. (Останалите топки, които се подават на тези деца, се губят.) Другите топки с нечетни номера се подават на всеки ход в посока, обратна на часовниковата стрелка. Топките с четни номера се подават в посока на часовниковата стрелка. Така при първия ход се губи топка 3 при второто дете, при втория ход се губи топка 98 при първото дете и т.н. Топките с по-големи от 1 нечетни номера попадат при второто дете при нечетните ходове и се губят; последно топката с номер 99 се губи на 97-ия ход. Аналогично, топките с четни номера попадат при първото дете при четните ходове, едновременно с първата топка. Последна от топките с четни номера се губи втората топка – при 98-ия ход.

Ще покажем, че след n минути, където $n < 98$, топките винаги са повече от една. За удобство ще си представим, че топките не се губят, а се слепват (като номерата се запазват). Да допуснем, че топките се събират накрая при първото дете.

Нека n е нечетно. Всички топки трябва да се окажат при първото дете след n минути, т.е. след нечетен брой минути. Ако първата топка не обходи всички деца, тя ще се връща при първото дете само след четен брой ходове. Следователно първата топка обикаля целия кръг, за което са необходими най-малко 99 минути.

Нека n е четно. Ако втората топка не направи обиколка на кръга без една стъпка, тя ще попада при първото дете само след нечетен брой минути. Следователно втората топка обикаля кръга без една стъпка, за което са необходими най-малко 98 минути.

Следователно при $n < 98$ топките в кръга са винаги повече от една.

Коментар. Получихме непълни решения, посочващи как за 98 минути да остане само една топка, но без доказателство за минималност на този срок.

Задача 6. *Съществуват ли такива естествени числа a, b, c, d, за които*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1, \quad \frac{a}{d} + \frac{c}{b} = 2008?$$

Решение. Ще илюстрираме един от възможните пътища за намиране на числа с желаните свойства.

Ако положим $x = \dfrac{1}{b}$ и $y = \dfrac{1}{d}$, ще получим следната система уравнения:

$$\left| \begin{array}{r} ax + cy = 1 \\ cx + ay = 2008 \end{array} \right.$$

Спрямо x и y тази система е линейна и по стандартен път намираме

$$x = \frac{a - 2008c}{a^2 - c^2}, \qquad y = \frac{2008a - c}{a^2 - c^2}.$$

Търсим естествени числа a и c така, че $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{y}$ също да са естествени числа. Забелязваме, че ако умножим всяко от числата a и c по k, то $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{y}$ също ще се увеличат k пъти. Затова ще постъпим по следния начин: първо ще изберем a и c така, че $\dfrac{1}{x}$ да е естествено число, а след това ще изберем подходящ естествен множител k, така че и $\dfrac{1}{y}$ да стане естествено число.

Знаменателят на $\dfrac{1}{x} = \dfrac{a^2 - c^2}{a - 2008c}$ подсказва да изберем $a = 2009$ и $c = 1$; тогава $\dfrac{1}{x} = 2009^2 - 1$ е естествено число. При тези стойности на a и c получаваме $\dfrac{1}{y} = \dfrac{2009^2 - 1^2}{2008.2009 - 1}$ и знаменателят подсказва да умножим a и c по $k = 2008.2009 - 1$. Тогава $\dfrac{1}{y}$, както и $\dfrac{1}{x}$, ще са естествени числа.

Получихме следното решение:

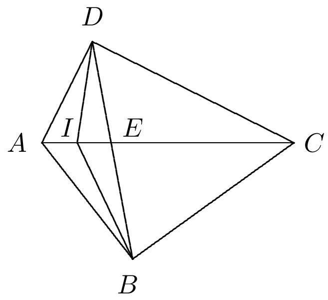
$$\begin{aligned} a &= 2009(2008.2009-1) \quad , \quad c = 2008.2009-1 \\ b &= 2008.2010(2008.2009-1) \quad , \quad d = 2008.2010. \end{aligned}$$

Задача 7. *В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ никои две страни не са успоредни. Ъглите между диагонала AC и страните на четириъгълника са равни (в някакъв ред) на $16°$, $19°$, $55°$ и $55°$. На колко може да е равен острият ъгъл между диагоналите AC и BD?*

Решение. Ще докажем, че търсеният ъгъл е равен на $87°$. Нека пресечната точка на диагоналите е E. Има два принципно различни варианта за разположение на ъглите – или равните ъгли имат общ връх, или са с върхове краищата на диагонала и са в една и съща полуравнина относно този диагонал.

Нека първо $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC = 55°$, $\sphericalangle BCA = 19°$ и $\sphericalangle DCA = 16°$. Центърът I на вписаната в $\triangle ABD$ окръжност лежи на ъглополовящата AC. Тъй като

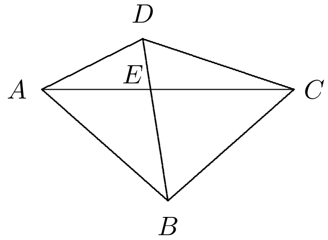
$$\sphericalangle BID = 90° + \frac{1}{2}\sphericalangle BAD = 145°,$$



а $\sphericalangle BCD = 16° + 19° = 35°$, то четириъгълникът $BCDI$ е вписан в окръжност. Следователно $\sphericalangle DBI = \sphericalangle DCI = 16°$. Оттук намираме

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABD &= 2\sphericalangle DBI = 32° \\ \sphericalangle AED &= \sphericalangle ABD + \sphericalangle BAC = 87°. \end{aligned}$$

Вторият случай е $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = 55°$, $\sphericalangle DAC = 19°$ и $\sphericalangle DCA = 16°$. Тогава $\sphericalangle ADC = 145°$, $\sphericalangle ABC = 70°$. Центърът на описаната около $\triangle ADC$ окръжност е връх на равнобедрен триъгълник с основа AC и ъгъл при върха, равен на $2(180° - \sphericalangle ADC) = 70°$. Следователно точка B е център на описаната около $\triangle ADC$ окръжност. Оттук намираме



$$\begin{aligned} \sphericalangle ABD &= 2\sphericalangle DCA = 32° \\ \sphericalangle AED &= \sphericalangle ABD + \sphericalangle BAC = 87°. \end{aligned}$$