Трениpовъчен вариант за 10. – 12. клас

Задача 1. *Дадени са 30 карти, на десет от които е записано числото a, на други десет – числото b, и на останалите десет – числото c (числата a, b, c са две по две различни). Известно е, че за всеки пет карти могат да се изберат други пет така, че сборът от числата, написани на десетте карти, да е 0. Докажете, че едно от числата a, b, c е равно на 0.*

Решение. Нека $a < b < c$. Да пресметнем всички сборове на числа, записани на някои пет от дадените карти. Според условието на задачата, за всеки такъв сбор s съществува противоположен сбор $-s$. Това означава, че ако на числовата ос отбележим всички получени сборове, полученото множество от точки ще е симетрично относно 0.

Крайните сборове в това множество са противоположни; значи най-големият сбор $5c$ е противоположен на най-малкия сбор $5a$. От равенството $5a + 5c = 0$ следва, че $a = -c$.

Най-близките до крайните сборове също са противоположни. Това са сборовете $4a + b$ и $4c + b$; значи $(4a + b) + (4c + b) = 0$. Тъй като $a = -c$, получаваме $b = 0$.

Коментар. Ключов момент в решението е подреждането на числата по големина и разглеждането на най-големите и най-малки сборове на пет числа. (Такъв подход е известен като принцип на крайния елемент.)

Задача 2. *Възможно ли е най-малкото общо кратно на естествените числа* $1, 2, \ldots, n$ *да е* 2008 *пъти по-голямо от най-малкото общо кратно на числата* $1, 2, \ldots, m$*?*

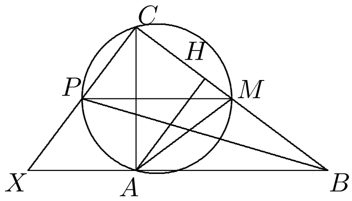
Решение. Да допуснем, че $2008.\ \text{НОК}\ (1, 2, ..., m) = \text{НОК}\ (1, 2, ..., n)$.

Ако $2^k \leq m < 2^{k+1}$ и $3^l \leq m < 3^{l+1}$, то в разлагането на НОК $(1, 2, ..., m)$ на прости множители двойката е на степен k, а тройката е на степен l. Тъй като 2008 се дели на 8, то в разлагането на НОК $(1, 2, ..., n)$ двойката е на степен $k + 3$. Това означава, че $n \geq 2^{k+3}$. От неравенствата

$$n \geq 2^{k+3} > 4m > 3m \geq 3^{l+1}$$

следва, че в разлагането на НОК $(1, 2, ..., n)$ тройката е на степен, по-голяма от l. Тъй като 2008 не се дели на 3, това е невъзможно. Следователно отговорът на въпроса в задачата е отрицателен.

Задача 3. *В триъгълника ABC с прав ъгъл при връх A точка M е среда на BC, а H е пета на височината през A. Права през M, перпендикулярна* *на AC, пресича описаната около AMC окръжност в точка P. Докажете, че отсечката BP разполовява отсечката AH.*



Решение. Правата PM е перпендикуярна на AC, значи е успоредна на AB. Тогава PM е средна отсечка в $\triangle XBC$, където $X = PC \cap AB$. Това означава, че BP е медиана в $\triangle XBC$.
От друга страна, $\triangle AMC$ е равнобедрен ($AM = MC$), следователно MP е диаметър на описаната около него окръжност. Това означава, че $\sphericalangle PCM = 90^\circ$, т.е. $AH || CX$. Следователно BP дели AH в същото отношение, в каквото дели и CX, т.е. я разполовява.

Задача 4. *Дадени са изпъкнал многоъгълник и квадрат. Известно е, че както и да се разположат две копия на многоъгълника вътре в квадрата, ще се намери обща за двете точка. Докажете, че както и да се разположат три копия на многоъгълника вътре в квадрата, ще се намери обща и за трите точка.*

Решение. Да допуснем, че някое копие M на многоъгълника може да се разположи в квадрата така, че да не покрива центъра O на квадрата. Разглеждаме копието M' на многоъгълника, което е симетрично на M спрямо O. Всяка точка на M' лежи вътре в квадрата, тъй като е образ на вътрешна за квадрата точка спрямо центъра O. Да допуснем, че M и M' имат обща точка X. Тъй като $X \in M'$, то нейната симетрична точка X' спрямо O е от M. Точките X и X' са от изпъкналия многоъгълник M, следователно всяка точка от отсечката XX' е от M. В частност, $O \in XX'$ и значи центърът на квадрата лежи в M. Полученото противоречие означва, че M и M' не се пресичат.

Допускането, че някое копие на многоъгълника може да се разположи в квадрата така, че да не покрива центъра O, доведе до противоречие с условието, че всеки две копия на многоъгълника в квадрата имат обща точка. Следователно всяко копие на многоъгълника покрива O; центърът на квадрата е обща точка и за три копия, разположени в квадрата.

Коментар. Квадратът в условието на задачата може да се замени с произволна централно-симетрична фигура.

Задача 5. *Дадена е таблица (виж чертежа). Позволено е да се разместват редовете, а също да се разместват стълбовете (в произволен ред). Колко различни таблици могат да се получат по този начин от дадената таблица?*

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

Решение. Ще докажем, че броят на различните таблици е 7!.6!.

Забелязваме, че записаните във всеки ред и стълб числа са различни. Освен това, ако към всяко число от първия ред се прибави 6 и се запише остатъка на получения сбор при деление на 7 (с уговорката вместо 0 да се пише 7), се получава наредбата на числата във втория ред:

първи ред	1	2	3	4	5	6	7
	$\downarrow +6$	$\downarrow +6$	$\downarrow +6$	$\downarrow +6$	$\downarrow +6$	$\downarrow +6$	$\downarrow +6$
	7	8	9	10	11	12	13
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
втори ред	7	1	2	3	4	5	6

Третият ред се получава по същия начин, като се прибави 5 към първия, четвъртият – като се прбави 4 към първия и т.н. При разместване на редове и стълбове това свойство се запазва в следния вид: всеки ред от втори до седми се получава от първия, като към съответните числа на първия ред се прибави едно също събираемо и се запише остатъка на сбора при деление на 7 (вместо 0 се пише 7). Съответното събираемо за всеки ред се определя еднозначно, например, от първото число в реда. Това означава, че таблицата напълно се определя от числата в горния ред и левия стълб.

С подходящо разместване на стълбовете може да се получи произволна наредба на числата от 1 до 7 в горния ред. Броят на всички такива пермутации е 7!. С разместване на редовете (от втория до седмия) може да се получи произволна наредба на числата в шестте останали полета на левия стълб; броят на пермутациите им е 6!. Следователно таблицата може да се определи по 7!.6! начина.