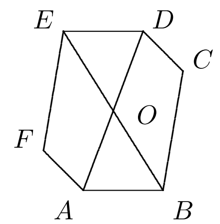
Тренировъчен вариант за 7. – 9. клас

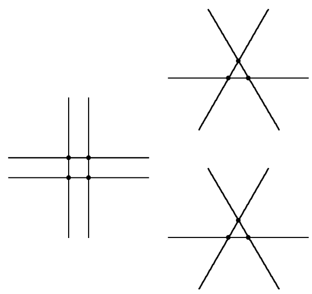
Задача 1. *Даден е изпъкнал шестоъгълник $ABCDEF$ с успоредни срещуположни страни ($AB||DE$, $BC||EF$ и $CD||FA$). Ако $AB = DE$, докажете, че $BC = EF$ и $CD = FA$.*

Решение. Тъй като страните AB и DE са успоредни и равни, то $ABDE$ е успоредник и нека O е общата среда на диагоналите му AD и BE.



Ценрална симетрия с център O изобразява точка A в D, а точка E – в B. Централната симетрия изобразява всяка права в успоредна на нея права. Значи образът на правата AF е успоредна на нея права през D, т.е. правата DC. Също, образът на правата EF е успоредна на нея права през B, т.е. правата BC.
Тогава пресечната точка F на правите AF и EF се изобразява в пресечната точка на правите DC и BC, която е C. Тъй като образът на отсечката AF е DC, то $AF = CD$; образът на отсечката EF е BC и значи $BC = EF$.

Задача 2. *Дадени са 10 равни отсечки в равнината. Всички пресечни точки са оцветени. Всяка оцветена точка разделя всяка от дадените отсечки, на които лежи, в отношение* $3 : 4$. *Колко най-много са оцветените точки?*



Решение. Ще докажем, че оцветените точки са най-много 10.
Точките, които разделят дадена отсечка в отношение $3 : 4$ (или $4 : 3$) са две; значи на една отсечка има най-много две оцветени точки. От друга страна, всяка оцветена точка лежи на поне две отсечки. Следователно оцветените точки са най-много $\dfrac{10.2}{2} = 10$.
На чертежа е показан един от възможните примери с 10 оцветени точки.

Задача 3. *Дадени са 30 карти, на десет от които е записано числото a, на други десет – числото b, и на останалите десет – числото c (числата a, b, c са две по две различни). Известно е, че за всеки пет карти могат да се изберат други пет така, че сборът от числата, написани на десетте карти, да е 0. Докажете, че едно от числата a, b, c е равно на 0.*

Решение. Нека $a < b < c$. Да пресметнем всички сборове на числа, записани на някои пет от дадените карти. Според условието на задачата, за всеки такъв сбор s съществува противоположен сбор $-s$. Това означава, че ако на числовата ос отбележим всички получени сборове, полученото множество от точки ще е симетрично относно 0.

Крайните сборове в това множество са противоположни; значи най-големият сбор $5c$ е противоположен на най-малкия сбор $5a$. От равенството $5a + 5c = 0$ следва, че $a = -c$.

Най-близките до крайните сборове също са противоположни. Това са сборовете $4a + b$ и $4c + b$; значи $(4a + b) + (4c + b) = 0$. Тъй като $a = -c$, получаваме $b = 0$.

Коментар. Ключов момент в решението е подреждането на числата по големина и разглеждането на най-големите и най-малки сборове на пет числа. (Такъв подход е известен като принцип на крайния елемент.)

Задача 4. *Намерете всички естествени числа n, за които $(n+1)!$ се дели на сбора $1! + \cdots + n!$. ($k!$ е произведението на естествените числа от 1 до k включително).*

Решение. Както са отбелязали повечето участници, $n = 1$ и $n = 2$ изпълняват условието. Ще докажем, че те са единствените естествени числа с желаното свойство.

Да допуснем, че $n > 2$ и

$$(n+1)! = k(1! + ... + n!). \tag{1}$$

Тъй като

$$n(1! + \cdots + n!) > n((n-1)! + n!) = n(n-1)! + n.n! = n! + n.n! = (n+1)!,$$

то $k < n$. Тогава, като разделим равенството (1) на k, получваме

$$(k-1)!(k+1)(k+2)\ldots(n+1) = 1! + \cdots + n!. \tag{2}$$

В произведението $1.2.\ldots(n+1) = (n+1)!$ има поне два четни множителя (тъй като $n + 1 \geq 4$). Следователно след разделяне на k, т.е. на един множител, в произведението ще остане поне един четен множител. Това означава, че лявата страна на (2) е четна.

От друга страна, дясната страна на (2) е сбор със само едно нечетно събираемо (това е 1!) и следователно е нечетна. Получихме противоречие.

Задача 5. *Полетата на дъска 10×10 са оцветени в червен, син или бял цвят. Всеки две полета с обща страна са различно оцветени. Червените*

полета са точно 20.
а) Докажете, че от дъската винаги могат да се изрежат 30 правоъгълника, всеки от които е съставен от две полета – бяло и синьо.
б) Покажете пример на оцветяване, при което от дъската могат да се изрежат 40 такива правоъгълника.
в) Покажете пример на оцветяване, при което не могат да се изрежат повече от 30 такива правоъгълника.

Решение. а) Както и да разрежем дъската на 50 правоъгълника 1×2, точно 20 от тях ще съдържат червено поле. Следователно останалите 30 са съставени от бяло и синьо поле.

б) Можем да разположим 40 синьо-бели правоъгълника вертикално (във всеки стълб по четири), а останалите 20 полета да оцветим в червено:

б	ч	б	ч	б	ч	б	ч	б	ч
с	б	с	б	с	б	с	б	с	б
ч	с	ч	с	ч	с	ч	с	ч	с
с	б	с	б	с	б	с	б	с	б
б	с	б	с	б	с	б	с	б	с
с	б	с	б	с	б	с	б	с	б
б	с	б	с	б	с	б	с	б	с
ч	б	ч	б	ч	б	ч	б	ч	б
б	с	б	с	б	с	б	с	б	с
с	ч	с	ч	с	ч	с	ч	с	ч

в) В този случай не е достатъчно само да покажем примерно оцветяване; необходимо е и да докажем, че при избраното оцветяване от дъската не могат да се изрежат повече от 30 синьо-бели правоъгълника.

Да оцветим шахматно 20 червени полета в долните четири реда на дъската (виж чертежа). Продължаваме шахматното оцветяване на дъската, като поставяме звездички в горните шест реда. Тогава всеки правоъгълник 1×2 съдържа или червено поле, или звездичка. Следователно всеки синьо-бял правоъгълник съдържа звездичка. Но звездичките са 30, значи синьо-белите правоъгълници са най-много 30.

⋆		⋆		⋆		⋆		⋆	
	⋆		⋆		⋆		⋆		⋆
⋆		⋆		⋆		⋆		⋆	
	⋆		⋆		⋆		⋆		⋆
⋆		⋆		⋆		⋆		⋆	
	⋆		⋆		⋆		⋆		⋆
ч		ч		ч		ч		ч	
	ч		ч		ч		ч		ч
ч		ч		ч		ч		ч	
	ч		ч		ч		ч		ч