Тренировъчен вариант, 10.-12. клас

2.1. [3] Дадени са 100 дигитални снимки на възрастен и по-ниско от него дете (всичките 200 човека на снимките са различни). Размерите на всяка снимка могат да се променят пропорционално. Да се докаже, че след възможни промени в мащаба, снимките могат да се включат в картина така, че всички възрастни да са по-високи от всички деца на картината.

Решение. За всяка снимка избираме рационално число, по-голямо от ръста на детето и по-малко от ръста на възрастния човек. Тези числа представяме като обикновени дроби и ги привеждаме към общ знаменател Q. Нека намалим всяка снимка толкова пъти, колкото е числителят на съответната дроб (със знаменател Q). На получените снимки всички деца ще са по-ниски от $\frac{1}{Q}$, а всички възрастни ще са по-високи от $\frac{1}{Q}$.

2.2. [2+2] На лист са записани 1 и числата x и y. За един ход на листа може да се запише реципрочното на някое от вече записаните числа или сбора или разликата на две от записаните числа. Възможно ли е след няколко хода на листа да се появи числото x^2? А числото xy?

Решение. а) Виж 1.2. б) Дадените операции позволяват записано число z да се раздели на 2: $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z}$, $\frac{2}{z}$, $\frac{z}{2}$. От числата x и y получаваме $x+y$ и $x-y$. Тогава от а) знаем, че могат да се получат и $(x+y)^2$ и $(x-y)^2$. Като образуваме разликата $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$, остава два пъти да разделим на 2.

2.3. [4] Дадена е права l и точки A и B в една и съща полуравнина спрямо нея и на едно и също разстояние от l. С помощта на пергел и линия без деления, намерете точка M от l, за която произведението $AM.MB$ е минимално.

Решение. Лицето на $\triangle AMB$ не зависи от M, тъй като основата AB и височината към нея са постоянни. От друга страна, това лице е равно на $\frac{1}{2}AM.BM\sin\angle AMB$. Следователно на най-малкото произведение $AM.BM$ съответства най-голям синус на $\angle AMB$. Да построим окръжност с диаметър AB. Ако тя пресича правата l в две точки P и Q, то те са търсените точки ($\sin\angle APB=\sin\angle AQB=1$). В обратен случай търсената точка M е сечението на l и симетралата на AB (от тази точка отсечката AB се вижда под най-голям нетъп ъгъл, тъй като останалите точки от правата лежат извън описаната около ABM окръжност).

2.4. [4] На 29 карти са записани съответно числата $1, 2, \dots, 29$. Фокусник със завързани очи дава картите на един от зрителите. Зрителят скрива две карти и дава останалите на помощника на фокусника. Помощникът избира две от тях и зрителят съобщава на фокусника избраните от помощника числа. След това фокусникът отгатва кои карти е скрил зрителят. Каква уговорка между фокусника и неговия помощник може да се крие зад този трик?

Решение. Да разположим мислено картите в кръг. Тогава, ако зрителят е избрал две несъседни карти A и B, помощникът избира следващата след A и следващата след B карти (в посока по часовниковата стрелка). Ако зрителят е избрал две съседни карти, помощникът избира следващите две съседни карти (по посока на часовниковата стрелка).

2.5. [1+2+2] Квадрат със страна 1 см е разрязан на три изпъкнали многоъгълника. Възможно ли е диаметърът на всеки от тях да не надвишава а) 1 см? б) 1,01 см? в) 1,001 см?

(Диаметър на многоъгълник е най-голямото разстояние между два върха на многоъгълника.)

Отговор: а, в - невъзможно, б - възможно.

Решение. а) Да допуснем, че е възможно. Тъй като многоъгълниците са три, то някои два върха на квадрата попадат в един многоъгълник. Нека това са A и B. Останалите точки от страната AD се намират на по-голямо от 1 разстояние от B, значи те са извън този многоъгълник. Следователно A е на границата на два многоъгълника (първия и втория). Аналогично B е на границата на първия и третия (B не може да е във втория). Но тогава средата K на CD не може да е в нито един от многоъгълниците. Противоречие.

б) Възможен е следният пример: ако O е център на квадрата $ABCD$, K е среда на CD, $E \in AD$ и $F \in BC$, като $AE = BF = 0,14$, многоъгълниците са $AEOFB$, $EOKD$ и $FOKC$ с диаметри

$$AF = \sqrt{1^2 + 0,14^2} < 1,01, \quad FK = EK = \sqrt{0,5^2 + 0,86^2} < 1.$$

в) Да допуснем, че многоъгълниците M_1, M_2, M_3 са с желаните диаметри. Нека върховете A и B са в M_1. Да построим на страната AD отсечка $AG = 0,05$, а на страната BC - отсечка $BH = 0,1$. Точките G и H не могат да са в M_1, тъй като $AH > BG = \sqrt{1^2 + 0,05^2} > 1,001$. Нека G е в M_2. Тогава H е в M_3 ($HG = BG > 1,001$). Тогава средата K на страната CD не е в нито един от многоъгълниците: $AK > GK > HK = \sqrt{0,9^2 + 0,5^2} > 1,001$. Противоречие.