Тренировъчен вариант, 7.-9. клас

1.1. [3] На шахматна дъска са поставени бели и черни фигури. Във всеки ред (стълб) белите фигури са два пъти повече, отколкото са черните фигури в този ред (стълб). Най-много колко фигури са поставени на дъската?

Отговор. 48 фигури.

Решение. Броят на фигурите във всеки стълб е кратен на 3, следователно е най-много 6. Тогава на дъската фигурите са най-много 8.6 = 48. Например, на белите полета поставяме 32 бели фигури, а 16 черни фигури слагаме на главния "черен"диагонал и на двата успоредни на него "черни"диагонала с "дължина"4.

1.2. [4] На лист са записани 1 и числото x, което не е естествено. За един ход на листа може да се запише реципрочното на някое от вече записаните числа или сбора или разликата на две от записаните числа. Възможно ли е след няколко хода на листа да се появи числото x^2?

Отговор. Възможно е.

Решение. Например, последователно се записват числата:

$$1,\ x,\ \frac{1}{x},\ x+1,\ \frac{1}{x+1},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2+x},\ x^2+x,\ (x^2+x)-x=x^2.$$

1.3. [4] Средата на една от страните на даден триъгълник и петите на височините към другите две страни са върхове на равностранен триъгълник. Следва ли от това, че даденият триъгълник е равностранен?

Отговор. Не следва.

Решение. Да разгледаме произволен остроъгълен $\triangle ABC$ с $\angle B = 60^\circ$. Нека височините са AH и CK, а M е средата на AC. В правоъгълните триъгълници AHC и AKC медианите HM и KM са равни на половината на хипотенузата, затова триъгълниците CMH и AMK са равнобедрени. За $\triangle CMH$ външният ъгъл $\angle AMH = 2\angle C$, а за $\triangle AMK$ външният ъгъл $\angle CMK = 2\angle A$. Следователно

$$\angle HMK = \angle AMH + \angle CMK - 180^\circ = 2(\angle A + \angle C) - 180^\circ = 2.120^\circ - 180^\circ = 60^\circ.$$

Триъгълникът HMK е равнобедрен с ъгъл 60°, следователно е равностранен.

1.4. [5] В полетата на таблица 29×29 всяко от естествените числа $1, 2, \ldots, 29$ е записано по 29 пъти. Ако сборът от числата, записани в полетата над главния диагонал, е три пъти по-голям от сбор на числата, записани под него, кое число е записано в централното поле на таблцата? (Главният диагонал свързва горния ляв с долния десен ъгъл на таблицата.)

Отговор. 15.

Решение. Над диагонала има $1+2+\cdots+28 = \dfrac{28.29}{2} = 406$ числа; толкова са и числата под диагонала. Но сборът на 406-те най-големи числа в таблицата (числата $16, 17, \ldots, 29$, взети по 29 пъти) е равен на $29\dfrac{(16+29).14}{2} = 29.45.7$ и е точно три пъти по-голям от сбора на 406-те най-малки числа (числата $1, 2, \ldots, 14$, взети по 29 пъти), който е $29\dfrac{(1+14).14}{2} = 29.15.7$. Следователно всички числа по диагонала са равни на 15.

1.5. [5] На пет карти са записани съответно цифрите 1, 2, 3, 4, 5. Фокусник със завързани очи дава картите на един от зрителите. Зрителят скрива две карти и дава останалите три на помощника на фокусника. Помощникът избира две от тях и зрителят съобщава на фокусника избраните от помощнка числа. След това фокусникът отгатва кои карти е скрил зрителят. Каква уговорка между фокусника и неговия помощник може да се крие зад този трик?

Решение. Да номерираме върховете на правилен петоъгълник с числата от 1 до 5 и да построим всички отсечки с върхове в тези точки. Двете избрани от зрителя карти съответстват на една отсечка a. Измежду трите карти, които държи помощникът, има две, които съответстват на успоредна на a отсечка. Тези две карти помощникът дава на фокусника. (Виж също решението на задача 2.4)