XXIX МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур, ОСНОВЕН ВАРИАНТ за 10 – 12 клас

(Резултатът се формира от трите задачи, по които са събрани най-много точки.)

точки	задачи	
3	1.	а) Петър и Васко си намислили по три естествени числа. Петър пресметнал най-големия общ делител на всеки две от своите числа и получените резултати записал на дъската. Васко пресметнал най-малкото общо кратно на всеки две от неговите числа и също записал получените резулатати. Оказало се, че Васко и Петър са записали едни и същи числа. Докажете, че всички записани на дъската числа са равни.
3		б) Ако Петър и Васко са намислили по четири числа, при същата постановка на задачата ще бъде ли вярно и същото заключение?
6	2.	Диагоналите на вписан четириъгълник се пресичат в точка P. Нека K, L, M, N са средите на страните на четириъгълника. Докажете, че радиусите на описаните окръжности на триъгълниците PKL, PLM, PMN и PNK са равни.
6	3.	Намерете всички крайни аритметични прогресии със сбор 1, всеки член на които е от вида $\frac{1}{k}$, където k е естествено число.
6	4.	Масите на няколко тежести са записани на етикетчета, но етикетчетата са залепени по произволен начин на тежестите. На разположение е везна с форма на отсечка, закрепена в средата си. Тежестите се прикачават в произволни точки от тази отсечка и се отчита дали везната е в равновесие или не. Може ли с едно претегляне да се установи дали всички етикетчета са залепени правилно? (Везната е в равновесие, когато сборът от моментите на тежестите отляво на средата и отдясно на средата е един и същ. Моментът на тежестта е произведение на масата m и разстоянието до средата s.)
	5.	Очите на фокусника са завързани, докато един от зрителите подрежда в редица N еднакви монети – някои поставя в положение 'ези', останалите 'тура'. Помощникът на фокусника моли зрителя да запише естествено число от 1 до N на лист и да го покаже на публиката. Виждайки числото, помощникът избира една монета от редицата я преобръща. Тогава развързват очите на фокусника, той поглежда редицата и познава избраното от зрителя число.
4		а) Докажете, че ако фокусникът и неговият помощник имат метод за познаване на избраното число при $N = a$ и $N = b$, то съществува метод и при $N = ab$.
4		б) Намерете всички стойности на N, за които такъв метод съществува.
8	6.	В равнината са дадени изпъкналите многоъгълници P и Q. За всяка страна на P разглеждаме двете успоредни на нея прави, между които се намира Q и разстоянието между тях е минимално. Ако дължината на избраната страна е l, а разстоянието между правите е h, пресмятаме lh. Сумираме получените поизведения за всички страни на P и получаваме (P, Q). Докажете, че $(P, Q) = (Q, P)$.
	7.	Пред Алекс има 100 затворени кутии, всяка от които съдържа червена или синя топка. Алекс има един лев в своята сметка. Той избира някоя затворена кутия и един цвят, като залага сума, не превишаваща тази в сметката му (залогът може да не е цяло число стотинки). Кутията се отваря и сметката на Алекс се увеличава или намалява със заложената сума в зависимост от това дали е познал или не цвета на топката. Играта продължава докато се отворят всички кутии. Каква максимална сума може да си гарантира Алекс, ако му е известно че
3		а) има само една синя топка;
5		б) броят на сините топки е равен на n.
		(Алекс може да заложи 0, като по този начин безплатно ще види цвета на топката в избраната кутия.)