

XXIX МЕЖДУНАРОДЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур, ОСНОВЕН ВАРИАНТ за 7 – 9 клас

(Резултатът се формира от трите задачи, по които са събрани най-много точки.)

точки задачи

- 5 1. На страната CD на ромб $ABCD$ е взета точка K , за която $AD = BK$. Нека F е пресечната точка на диагонала BD и симетралата на страната BC . Докажете, че точките A , F и K лежат на една права.
- 3 2. а) Петър и Васко си намислили по три естествени числа. Петър пресметнал най-големия общ делител на всеки две от своите числа и получените резултати записал на дъската. Васко пресметнал най-малкото общо кратно на всеки две от неговите числа и също записал получените резултати. Оказало се, че Васко и Петър са записали едни и същи числа. Докажете, че всички записани на дъската числа са равни.
- 3 б) Ако Петър и Васко са намислили по четири числа, при същата постановка на задачата ще бъде ли вярно и същото заключение?
- 6 3. Мишо стои в центъра на локва с форма на кръг с радиус 100 м. Всяка минута той прави крачка с дължина 1 м, като преди това съобщава на Ели избраната от него посока. Ели може да го принуди да направи крачка в противоположната на избраната от него посока. Съществува ли стратегия за излизане от локвата или Ели винаги може да попречи на Мишо?
- 7 4. Дадена е таблица $1 \times N$. На всеки ход първият от двама играчи слага кръстче в някое свободно квадратче, а вторият слага нула. Не се разрешава в две съседни квадратчета да има две кръстчета или две нули. Играчът губи, когато не може да направи ход. Кой от двамата играчи има печеливша стратегия?
- 8 5. Масите на няколко тежести са записани на етикетчета, но етикетчетата са залепени по произволен начин на тежестите. На разположение е везна с форма на отсечка, закрепена в средата си. Тежестите се прикачават в произволни точки от тази отсечка и се отчита дали везната е в равновесие или не. Може ли с едно претегляне да се установи дали всички етикетчета са залепени правилно? (Везната е в равновесие, когато сборът от моментите на тежестите отляво на средата и отдясно на средата е един и същ. Моментът на тежестта е произведение на масата m и разстоянието до средата s .)
- 4 6. Очите на фокусника са завързани, докато един от зрителите подрежда в редица N еднакви монети – някои поставя в положение 'ези', останалите 'тура'. Помощникът на фокусника моли зрителя да запише естествено число от 1 до N на лист и да го покаже на публиката. Виждайки числото, помощникът избира една монета от редицата я преобръща. Тогава развързват очите на фокусника, той поглежда редицата и познава избраното от зрителя число.
- 5 а) Докажете, че ако фокусникът и неговият помощник имат метод за познаване на избраното число за $N = a$, то съществува метод и за $N = 2a$.
- 5 б) Намерете всички стойности на N , за които такъв метод съществува.
- 9 7. Вова решил да стане велик писател. На всяка буква от азбуката той съпоставил дума, която съдържа тази буква. Първо записал думата, съответстваща на буквата А. След това вместо всяка буква в тази дума, той записал думата, която ѝ съответства (думите са разделени с интервали). В получения текст отново заменил всяка буква със съответната ѝ дума. След 40 такива операции, текстът започвал така: "Ред кораби на дремещи моряци". Докажете, че тази фраза се среща още поне веднъж в текста.