

# XXIX МЕЖДУНАРОДЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Пролетен тур, ОСНОВЕН ВАРИАНТ за 10. – 12. клас

(Резултатът се формира от трите задачи, по които са събрани най-много точки.)

---

точки задачи

1. Хартиен триъгълник, един от ъглите на който е равен на  $\alpha$ , разрязали на няколко триъгълника. Възможно ли е всички ъгли на всички получени триъгълници да са по-малки от  $\alpha$ , ако
- 3 а)  $\alpha = 70^\circ$ ;  
3 б)  $\alpha = 80^\circ$ ?
2. В точка  $P$  на числовата права стои скакалец-точка. Точките 0 и 1 са капани. Преди всеки скок на скакалеца ние избираме произволно положително число  $X$ , след което скакалецът скача на разстояние  $X$  наляво или надясно (по свой избор). През цялото време виждаме къде се намира скакалеца. При кои  $P$  можем да избираме числата така, че със сигурност да вкараме скакалеца в капан, където и да се е намирал първоначално и както и да определя посоките за скачане?
- 6
3. Многочлен от степен  $n > 1$  има  $n$  различни корена  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Корените на производната му са  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ . Докажете неравенството
- 6
- $$\frac{e_1^2 + \dots + e_n^2}{n} > \frac{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2}{n-1}.$$
4. Петър и Васко начертали по един четириъгълник без успоредни страни. Всеки от двамата построил по един диагонал в своя четириъгълник и измерил ъглите, образувани от този диагонал и страните на четириъгълника. Петър получил ъгли  $\alpha, \alpha, \beta$  и  $\gamma$  (в някакъв ред), и Васко получил същите ъгли, евентуално в друг ред. Докажете, че ъглите между диагоналите в четириъгълника на Петър са същите като ъглите между диагоналите в четириъгълника на Васко.
- 7
5. В редица  $a_1, a_2, \dots$  са записани всички естествени числа в някакъв ред, като всяко естествено число е записано точно един път. Може ли със сигурност да се твърди, че съществуват няколко последователно записани числа  $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n}$ ,  $n \geq 1$ , чийто сбор е просто число?
- 8
6. Завързали очите на единадесет мъдреци и на главата на всеки сложили шапка в един от 1000 възможни цвята. След като развързали очите на мъдреците, всеки видял шапките на останалите, но не и своята. Тогава едновременно всеки мъдрец показал на останалите бяла или зелена карта. Възможно ли е след това всички едновременно да познаят цвета на своята шапка? (Мъдреците могат да се договарят преди да им завържат очите и знаят кои са възможните 1000 цвята.)
- 8
7. Дадени са две окръжности и три прави. Всяка права определя при пресичането си с двете окръжности равни хорди. Пресечните точки на правите са върхове на триъгълник. Докажете, че описаната около този триъгълник окръжност минава през средата на отсечката, свързваща центровете на дадените окръжности.
- 8