XXIX МЕЖДУНАРОДЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Пролетен тур, ОСНОВЕН ВАРИАНТ за 7. – 9. клас

(Резултатът се формира от трите задачи, по които са събрани най-много точки.)

точки задачи

1. Числото N е произведение на две последователни естествени числа. Докажете, че

2 а) отдясно на числото могат да се припишат две цифри така, че да се получи точен квадрат;

2 б) ако $N > 12$, това може да стане по единствен начин.

5 2. На страните AB и BC на $\triangle ABC$ са избрани съответно точки K и M така, че $KM || AC$. Отсечките AM и KC се пресичат в точка O. Ако е известно, че $AK = AO$ и $KM = MC$, докажете, че $AM = KB$.

6 3. Дадена е карирана ивица (с широчина едно квадратче), безкрайна и в двете посоки. Две квадратчета от ивицата са капани. Между капаните има N квадратчета, а в едно от тях стои скакалец. Преди всеки скок на скакалеца ние избираме произволно естествено число X, след което скакалецът скача на X квадратчета наляво или надясно (по свой избор). През цялото време виждаме къде се намира скакалеца. При кои N можем да избираме числата така, че със сигурност да вкараме скакалеца в капан, където и да се е намирал първоначално и както и да определя посоките за скачане?

6 4. Краен брой точки в равнината са оцветени в четири цвята, като има точки от всеки цвят. Никои три точки не лежат на една права. *Интересен* наричаме триъгълник със следните свойства:
- върховете му са точки, оцветени в три различни цвята;
- вътре в триъгълника няма оцветени точки.

Докажете, че съществуват три интересни триъгълника (които може да се пресичат).

7 5. В кръг са застанали 99 деца, като първоначално всяко дете държи топка. Всяка минута всяко дете подхвърля топката си към някой от двамата си съседи. Ако към някое дете едновременно са хвърлени две топки, едната се загубва безвъзвратно. Най-малко след колко минути децата могат да останат само с една топка?

7 6. Съществуват ли такива естествени числа a, b, c, d, за които

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1, \quad \frac{a}{d} + \frac{c}{b} = 2008?$$

8 7. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ никои две страни не са успоредни. Ъглите между диагонала AC и страните на четириъгълника са равни (в някакъв ред) на 16°, 19°, 55° и 55°. На колко може да е равен острият ъгъл между диагоналите AC и BD?