XXX МЕЖДУНАРОДЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур, ОСНОВЕН ВАРИАНТ за 10. – 12. клас

(Резултатът се формира от трите задачи, по които са събрани най-много точки.)

точки	задачи	
4	1.	Дадена е квадратна дъска. Построени са успоредни на страните ѝ прави (по 7 прави във всяко направление), които разделят дъската на 64 правоъгълни полета. Тези полета са оцветени шахматно. Размерите им могат да са различни, но е известно, че отношението на лицето на всяко бяло поле към лицето на всяко черно поле не надхвърля 2. Намерете най-голямата възможна стойност на отношението на общото лице на белите полета към общото лице на черните полета.
6	2.	Пространството е разбито на еднакви кубове. Вярно ли е, че всеки от тях има обща стена с някой от останалите кубове?
6	3.	На маса са дадени $N > 2$ купчини, всяка от които съдържа един орех. Двама играчи се редуват, като за един ход могат да обединят две купчини, ако броят на орехите в едната е взаимнопрост с броя на орехите в другата. Побеждава играчът, който направи последния ход. За всяко N определете кой от играчите има печеливша стратегия.
6	4.	Даден е неравнобедрен трапец $ABCD$. Описаната около триъгълник BCD окръжност пресича правата AC в точка A_1 (различна от C). Аналогично се определят точките B_1, C_1 и D_1. Докажете, че $A_1B_1C_1D_1$ също е трапец.
8	5.	В безкрайната редица $a_1, a_2, a_3, \ldots$ числото a_1 е равно на 1, а всяко следващо число a_n се получава от предишното a_{n-1} по правилото: ако най-големият нечетен делител на n дава остатък 1 при деление на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, ако този остатък е равен на 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажете, че в тази редица всяко естествено число се среща безброй много пъти. (Първите членове на редицата са: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, ...)
9	6.	Многочленът $P(x)$ с реални коефициенти е такъв, че съществуват безброй много двойки цели числа (m, n), за които $P(m) + P(n) = 0$. Докажете, че графиката на функцията $y = P(x)$ има център на симетрия.
	7.	Тест включва 30 въпроса, всеки от които е с два избираеми отговора (верен и грешен). За един опит Виктор отговаря на всички въпроси и получава съобщение за броя на верните отговори. Може ли Виктор да направи такива опити, че да разбере всички верни отговори с най-много:
5	а)	29 опита (и да отговори вярно на всички въпроси при 30-я опит);
5	б)	24 опита (и да отговори вярно на всички въпроси при 25-я опит)?
		(В началото Виктор не знае нито един отговор и при всеки опит попълва един и същ тест.)