XXX МЕЖДУНАРОДЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур, ОСНОВЕН ВАРИАНТ за 7. – 9. клас

(Резултатът се формира от трите задачи, по които са събрани най-много точки.)

точки	задачи
4	1. На шахматно оцветена дъска 100×100 са поставени 100 царици така, че никои две от тях не се заплашват. Докажете, че във всеки ъглов квадрат 50×50 е поставена поне една царица.
6	2. Дадени са четири камъка, всеки от които тежи цяло число грамове. Дадена е везна с две блюда, която отчита разликата в теглата на лявото и дясното блюдо. Може ли с четири претегляния да се определи теглото на всеки камък, ако при едно от претеглянията е възможна грешка от 1 грам?
6	3. Серж нарисувал триъгълник ABC и построил медианата AD. След това съобщил на Иля дължината на медианата AD и дължината на страната AC. По тази информация Иля доказал, че $\angle CAB$ е тъп, а $\angle DAB$ е остър. Намерете отношението $AD : AC$ (и докажете, че за всеки триъгълник с това отношение е в сила твърдението на Иля).
6	4. Барон Мюнхаузен разказва, че притежава карта на страната Оз. На картата има пет града, всеки два от които са свързани с директен път (т.е. път, който не минава през друг град). Всеки път на картата пресича не повече от един друг път (и не повече от веднъж). На картата пътищата са жълти или червени и при обхождане на всеки град (по границата), цветовете на излизащите от него пътища се редуват. Възможно ли е барон Мюнхаузен да казва истината?
8	5. Дадени са положителните числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Известно е, че $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \frac{1}{2}$. Докажете, че $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) < 2$.
9	6. Даден е неравнобедрен триъгълник ABC. Външно за триъгълника са построени равнобедрени триъгълници $AB'C$ и $CA'B$ с основи съответно AC и BC и ъгли при основите, равни на φ. Правата през върха C, перпендикулярна на $A'B'$, пресича симетралата на отсечката AB в точка C_1. Намерете $\angle AC_1B$.
	7. В безкрайната редица $a_1, a_2, a_3, \ldots$ числото a_1 е равно на 1, а всяко следващо число a_n се получава от предишното a_{n-1} по правилото: ако най-големият нечетен делител на n дава остатък 1 при деление на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, ако този остатък е равен на 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажете, че в тази редица:
5	а) числото 1 се среща безброй много пъти;
5	б) всяко естествено число се среща безброй много пъти. (Първите членове на редицата са: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, …)