XXX МЕЖДУНАРОДЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур, ТРЕНИРОВЪЧЕН ВАРИАНТ за 10. – 12. клас

(Резултатът се формира от трите задачи, по които са събрани най-много точки.)

точки задачи

3 1. Алекс купил няколко кутии със сладки и записал броя на сладките във всяка кутия. Серж сложил по една сладка от всяка кутия в първата чиния, след това във втора чиния сложил по една сладка от всяка непразна кутия и т.н. Щом изпразнил всички кутии, Серж записал броя на сладките във всяка чиния. Докажете, че броят на различните числа, записани от Алекс, е равен на броя на различните числа, записани от Серж.

3 2. Решете системата уравнения ($n > 2$):

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \cdots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \cdots + x_n + x_1} = \ldots$$
$$\cdots = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_1 + \cdots + x_{n-1}}; \qquad x_1 - x_2 = 1.$$

4 3. В окръжност с радиус 2 е вписан 30-ъгълник $A_1A_2\ldots A_{30}$. Докажете, че на дъгите A_1A_2, A_2A_3,…, $A_{30}A_1$ може да се избере по една точка (съответно B_1, B_2,…,B_{30}) така, че лицето на 60-ъгълника $A_1B_1A_2B_2\ldots A_{30}B_{30}$ да е равно като число на периметъра на 30-ъгълника $A_1A_2\ldots A_{30}$.

4 4. Съществува ли аритметична прогресия от пет естествени числа, чието произведение е точна 2008-а степен на естествено число?

4 5. На безкрайна квадратна мрежа са нарисувани няколко правоъгълника със страни върху линиите на мрежата. Всеки от тях се състои от нечетен брой квадратчета и никои два правоъгълника нямат общо квадратче. Докажете, че всеки правоъгълник може да се оцвети в един от четири цвята така, че контурите на едноцветните правоъгълници да не се пресичат.