XXX МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Пролетен тур, ОСНОВЕН ВАРИАНТ за 10. – 12. клас

точки	задачи
4	1. Правоъгълник е разделен на няколко по-малки правоъгълника. Възможно ли е всяка отсечка, която свързва центровете на два от правоъгълниците, да пресича и трети правоъгълник?
4	2. Дадена е безкрайна редица от различни естествени числа. Всеки член на редицата след първия е равен или на средноаритметичното, или на средногеометричното на двата си съседни члена. Вярно ли е, че от известно място нататък всички членове на редицата са равни само на средноаритметичното на съседните си, или на тяхното средногеометрично?
6	3. Във всяка клетка на дъска 10×10 е поставена по една пешка. Можем да изберем диагонал (един диагонал се състои от всички клетки, чиито центрове лежат на една права, която сключва ъгъл 45° със страните на дъската), който съдържа четен брой пешки и да вземем една произволна пешка от него. Колко най-много пешки могат да се вземат от дъската по този начин?
6	4. Три равнини разделят паралелепипед на осем шестостена така, че всички стени на шестостените са четириъгълници (всяка равнина пресича две двойки срещуположни стени на паралелепипеда и не пресича стените от третата двойка). Около един шестостен може да се опише сфера. Да се докаже, че около всеки от тези шестостени може да се опише сфера.
8	5. Символът $\binom{n}{k}$ означава броя на начините, по които от множество от n предмета могат да се изберат k предмета (подредбата е без значение). Да се докаже, че ако k и l са естествени числа, по-малки от n, то числата $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{l}$ не са взаимнопрости.
9	6. Дадено е естествено число $n > 1$. Двама играчи, редувайки се, отбелязват точки върху окръжност: първият използва червен цвят, вторият – син. Когато върху окръжността са маркирани по n точки от всеки цвят, играта свършва. Всеки играч определя най-дългата дъга с краища в неговия цвят, която не съдържа други отбелязани точки. Играчът с по-голяма дъга печели (ако дължините са равни или и двамата играчи нямат такава дъга, играта завършва с равенство). Кой от двамата има печеливша стратегия?
9	7. В клетка от компютърна памет е записано числото 6. Компютърът извършва един милион операции. Операция n увеличава записаното в клетката число с най-големия общ делител на това чсло и n. Да се докаже, че при всяка операция компютърът увеличава записаното число или с 1, или с просто число.