XXX МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ
Пролетен тур, ОСНОВЕН ВАРИАНТ за 10. – 12. клас
РЕШЕНИЯ

Задача 1. Правоъгълник е разделен на няколко по-малки правоъгълника. Възможно ли е всяка отсечка, която свързва центровете на два от правоъгълниците, да пресича и трети правоъгълник?

Решение. Допускаме, че такова разделяне е възможно. Да разположим дадения правоъгълник в първи квадрант на координатна система така, че югозападният връх на правоъгълника да съвпадне с нейния център. Този от малките правоъгълници, чийто югозападен връх също съвпада с центъра на координатната система, ще наричаме *главен*. Нека координатите на неговия център са $(x; y)$.
Да разгледаме правоъгълниците, чиито южни страни (или част от тях) лежат на северната страна на главния правоъгълник; нека те са n на брой и кординатите на центровете им са $(x_i; y_i)$, като $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Нека $x_k < x < x_{k+1}$. Тогава отсечката, която свързва $(x; y)$ и $(x_k; y_k)$ трябва да пресича $(k+1)$-ия правоъгълник. Това означава, че отсечката с краища $(x; y)$ и $(x_{k+1}; y_{k+1})$ не може да пресича k-тия правоъгълник. Следователно тази отсечка трябва да пресича и източната страна на главня правоъгълник, т.е. $n = k + 1$.
По същия начин, ако правоъгълниците, чиито западни страни (или част от тях) лежат на източната страна на главния правоъгълник, са m на брой, ще получим, че отсечката, която свързва центъра на m-тия от тях с $(x; y)$ пресича северната страна на главния правоъгълник. Тогава n-тия северен и m-тия източен съсед на главня правоъгълник имат общи вътрешни точки; противоречие.

Задача 2. Дадена е безкрайна редица от различни естествени числа. Всеки член на редицата след първия е равен или на средноаритметичното, или на средногеометричното на двата си съседни члена. Вярно ли е, че от известно място нататък всички членове на редицата са равни само на средноаритметичното на съседните си, или на тяхното средногеометрично?

Решение. Да разгледаме редица, дефинирана с равенствата $a_{2k-1} = k^2$ и $a_{2k} = k(k+1)$ за всяко $k \geq 1$. Имаме

$$\sqrt{a_{2k-1}a_{2k+1}} = \sqrt{k^2(k+1)^2} = k(k+1) = a_{2k}$$

и

$$\frac{1}{2}(a_{2k} + a_{2k+2}) = \frac{1}{2}(k(k+1) + (k+1)(k+2)) = (k+1)^2 = a_{2k+1},$$

т.е. в тази редица средноаритметично и средногеометрично се редуват.

Задача 3. Във всяка клетка на дъска 10×10 е поставена по една пешка. Можем да изберем диагонал (един диагонал се състои от всички клетки, чиито центрове лежат на една права, която сключва ъгъл 45° със страните на дъската), който съдържа четен брой пешки и да вземем една произволна пешка от него. Колко най-много пешки могат да се вземат от дъската по този начин?

Решение. Диагонал, на който лежат четен (нечетен) брой пешки, ще наричаме четен (нечетен). В началото на дъската има 20 нечетни диагонали. Да разгледаме как се променя техният брой при сваляне на пешка от дъската (тя лежи на поне един четен диагонал). Ако пешката лежи на един четен и един нечетен диагонал, свалянето и не променя броя на нечетните диагонали. Ако пешката лежи на два четни диагонала, премахването й увеличава с 2 броя на нечетните диагонали. Следователно във всеки момент има поне 20 нечетни дагонали, т.е. поне 10 пешки ще останат на дъската.
Да означим клетките $(i;j)$, където $0 \leq i,\ j \leq 9$. Ще покажем как да се махнат всички пешки от клетките, за които $i+j$ е нечетно, с изключение на $(1;0),\ (3;0),$ $(5;0),\ (7;0)$ и $(9;0)$. Последователно сваляме пешките от клетките:

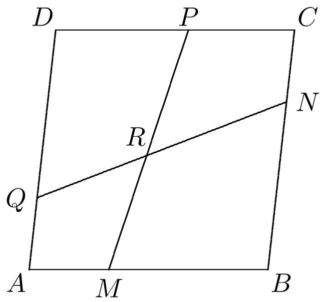
0.	$(0;1)$	$(0;3)$	$(0;5)$	$(0;7)$	$(0;9)$	1.	$(1;2)$	$(1;4)$	$(1;6)$	$(1;8)$
2.	$(2;1)$	$(2;3)$	$(2;5)$	$(2;7)$	$(2;9)$	3.	$(3;2)$	$(3;4)$	$(3;6)$	$(3;8)$
4.	$(4;1)$	$(4;3)$	$(4;5)$	$(4;7)$	$(4;9)$	5.	$(5;2)$	$(5;4)$	$(5;6)$	$(5;8)$
6.	$(6;1)$	$(6;3)$	$(6;5)$	$(6;7)$	$(6;9)$	7.	$(7;2)$	$(7;4)$	$(7;6)$	$(7;8)$
8.	$(8;1)$	$(8;3)$	$(8;5)$	$(8;7)$	$(8;9)$	9.	$(9;2)$	$(9;4)$	$(9;6)$	$(9;8)$

Аналогично от дъската се свалят всички пешки от клетките, за които $i+j$ е четно, с изключение на $(0;0),\ (2;0),\ (4;0),\ (6;0)$ и $(8;0)$. Така на дъската остават само пешките от първия ред.

Задача 4. Три равнини разделят паралелепипед на осем шестостена така, че всички стени на шестостените са четириъгълници (всяка равнина пресича две двойки срещуположни стени на паралелепипеда и не пресича стените от третата двойка). Около един шестостен може да се опише сфера. Да се докаже, че около всеки от тези шестостени може да се опише сфера.

Решение. Ще използваме две помощни твърдения.

Лема 1. На страните на успоредника $ABCD$ са избрани точки M, N, P, Q, като отсечките MP и NQ се пресичат в точка R. Ако четириъгълникът $AMRQ$ е вписан, то и около всеки от четириъгълниците $MBNR$, $NCPR$ и $PDQR$ може да се опише окръжност.
Доказателство. Да означим $\angle A = \angle C = \alpha$. Тъй като четириъгълникът $AMRQ$ е вписан, то $\angle MRQ = 180^\circ - \alpha$, откъдето $\angle NRP = 180^\circ - \alpha$, т.е. и четириъгълникът $NCPR$ е вписан. Освен това, от равенствата $\angle B = \angle D = 180^\circ - \alpha = \angle MRQ$ следва, че около $MBNR$ и $PDQR$ също може да се опише окръжност.



Лема 2. Нека $AMRQ$ и $A'M'R'Q'$ са срещулежащи стени на шестостен с ръбове AA', MM', RR' и QQ'. Ако всички стени на шестостена са вписани многоъгълници, то шестостенът може да се впише в сфера.
Доказателство. От сферите, съдържащи описаната около $AMRQ$ окръжност, избираме тази сфера, която съдържа точката A'. Тогава описаната около $\triangle AMA'$ окръжност лежи на сферата и, от друга страна, съдържа точката M', тъй като четириъгълникът $AMM'A'$ е вписан. Следователно M' лежи на сферата. Аналогично, R' и Q' също лежат на сферата, следователно шестостенът е вписан.

Да се върнем към дадената задача. Сечението на всяка от дадените три равнини с паралелепипеда е успоредник. Пресечниците на тези успоредници разделят всеки от тях на четири четириъгълника. Успоредниците включват по един вписан четириъгълник (стена на вписания шестостен) и от Лема 1. следва, че всички четриъгълници в тези успоредници са вписани.
Стените на паралелепипеда също са разделени на по четири четириъгълника. Три стени (с общ връх, който е връх и на вписания шестостен) съдържат вписан четириъгълник, т.е. на тези стени всички четириъгълници са вписани. Всяка от останалите три стени е разделена на четириъгълници, чиито ъгли са съответно равни на ъглите на четириъгълниците на срещуположната стена. Следователно тези четириъгълници също са вписани.
От Лема 2. получаваме, че всички шестостени са вписани.

Задача 5. Символът $\binom{n}{k}$ означава броя на начините, по които от множество от n предмета могат да се изберат k предмета (подредбата е без значение). Да се докаже, че ако k и l са естествени числа, по-малки от n, то числата $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{l}$ не са взаимнопрости.

Решение. Нека $0 < k < l < n$. Тогава

$$\binom{l}{k} < \binom{n}{k}. \tag{1}$$

Да допуснем, че от n играчи трябва да се избере отбор от l члена, като k от тях се определят за капитани. Отборът може да се избере по $\binom{n}{l}$ начина, а капитаните в отбора – по $\binom{l}{k}$ начина, т.е. изборът може да се осъществи по $\binom{n}{l}.\binom{l}{k}$ начина.

От друга страна, може първо да се изберат капитаните по $\binom{n}{k}$ начина, а след това отборът да се допълни с $l-k$ от останалите $n-k$ играчи, за което има $\binom{n-k}{l-k}$ възможности. Така изборът може да се осъществи по $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}$ начина. Получихме равенството

$$\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}.$$

Оттук $\binom{n}{k}$ дели произведението $\binom{n}{l}\binom{l}{k}$. Ако допуснем, че $\binom{n}{k}$ е взаимнопросто с $\binom{n}{l}$, то $\binom{n}{k}$ дели $\binom{l}{k}$, което противоречи на (1).

Задача 6. Дадено е естествено число $n > 1$. Двама играчи, редувайки се, отбелязват точки върху окръжност: първият използва червен цвят, вторият – син. Когато върху окръжността са маркирани по n точки от всеки цвят, играта свършва. Всеки играч определя най-дългата дъга с краища в неговия цвят, която не съдържа други отбелязани точки. Играчът с по-голяма дъга печели (ако дължините са равни или и двамата играчи нямат такава дъга, играта завършва с равенство). Кой от двамата има печеливша стратегия?

Решение. Ще покажем как вторият играч може да спечели.

1. Първият играч отбелязва първата червена точка. Вторият определя като *решаващи точки* върховете на правилния n-ъгълник с връх червената точка.

2. Докато е възможно, вторият играч отбелязва решаващи точки. Така всички решаващи точки са отбелязани преди последния ход на втория играч.

3. Когато решаващите точки са отбелязани, вторият играч търси двойка червени решаващи точки, които са съседни върхове на правилния n-ъгълник. За всяка такава двойка той отбелязва синя точка между двете червени. Ако първият е отбелязал k решаващи точки, броят на двойките е най-много $k-1$. Тогава вторият е отбелязал $n-k$ решаващи точки и, като раздели двойките с най-много $k-1$ нови точки, ще има поне още един ход.

4. Преди последния ход на втория играч са отбелязани всичките n решаващи точки и още $n-1$ точки. Следователно между някои две съседни решаващи точки (A и B) няма друга точка. Тъй като вторият играч е разделил всяка двойка съседни червени решаващи точки, то A или B е синя. Ако A е синя, вторият играч отбелязва своята последна синя точка много близо до B.

По този начин най-дългата дъга на втория играч може да се приближи произволно близо до $\frac{1}{n}$ от окръжността, докато най-дългата дъга на първия играч е по-малка от $\frac{1}{n}$ от окръжността. Вторият печели.

Задача 7. В клетка от компютърна памет е записано числото 6. Компютърът извършва един милион операции. Операция n увеличава записаното в клетката число с най-големия общ делител на това чсло и n. Да се докаже, че при всяка операция компютърът увеличава записаното число или с 1, или с просто число.

Решение. На стъпка 1. числото в клетката става 7; на стъпка 2. става 8 и на стъпка 3 става 9.

Да допуснем, че на k-тата стъпка в клетката се записва числото $3k$. Ще докажем, че съществува i от 1 до $k-1$ (включително), за което числото $2i+1$ е просто и за всяко j от 1 до $i-1$ на $(k+j)$-тата стъпка числото в клетката става $3k+j$, а на $(k+i)$-тата стъпка към него се прибавя простото число $2i+1$ и то става $3k+3i$. Така твърдението ще е доказано по индукция.

На $(k+1)$-та стъпка числото в клетката се увеличава с най-големия общ делител на $k+1$ и $3k$, т.е. с 1 или 3. Ако увеличението е 3, получаваме числото $3k+3$ и твърдението е доказано за $i=1$. Ако увеличението е 1, продължаваме нататък.

Нека за някое m всяка стъпка от $(k+1)$-та до $(k+m-1)$-та числото в клетката се е увеличавало с 1; така преди $(k+m)$-тата стъпка е станало $3k+m-1$. То ще се увеличи с най-големия общ делител на $k+m$ и $3k+m-1$, който е делител на $3(k+m)-(3k+m-1)=2m+1$.

Ако $2m+1$ е просто число, увеличението е $2m+1$ или 1; в първия случай твърдението е доказано за $i=m$, а във втория продължаваме нататък.

Ако $2m+1$ е съставно число, да разгледаме негов прост делител p. Тъй като на $(k+\frac{p-1}{2})$-тата стъпка увеличението е било 1, то числата p и $k+\frac{p-1}{2}$ са взаимнопрости. За $r=\dfrac{2m+1}{p}$ получаваме, че числата p и $k+\frac{p-1}{2}+\frac{p(r-1)}{2}$ са взаимнопрости, т.е. p и $k+m$ са взаимнопрости. Тъй като това е вярно за всеки прост делител на $2m+1$, то числата $2m+1$ и $k+m$ са взаимнопрости. Следователно $(k+m)$-тата стъпка ще увеличи числото с 1 и щродължаваме нататък.

Когато m стигне $k-1$, след $(2k-2)$-та стъпка в клетката е записано числото $4k-2$. Тъй като най-големият общ делител на $2k-1$ и $4k-2$ е $2k-1$. Числото $2(k-1)+1=2k-1$ е просто и затова на $(2k-1)$-та стъпка в клетката ще се запише числото $4k-2+2k-1=3(2k-1)$, което искахме да докажем.