XXX МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Пролетен тур, ОСНОВЕН ВАРИАНТ за 7. – 9. клас

точки	задачи
3	1. Васил и Петър играят следната игра. Първоначално на дъската са записани числата $\dfrac{1}{2008}$ и $\dfrac{1}{2009}$. На всеки ход Васил избира произволно число x, след което Петър избира едното от двете числа и го увеличава с x. Васил печели, ако на дъската се появи числото 1. Може ли Васил да победи, независимо от играта на Петър?
5	2. а) Да се докаже, че съществува многоъгълник, който може да бъде разделен с отсечка на две еднакви части, като единият край на отсечката е среда на страна на многоъгълника, а другият край дели някоя страна в отношение $1:2$. б) Съществува ли изпъкнал многоъгълник с това свойство?
5	3. Във всяка клетка на дъска 101×101, освен в централната, е поставен един от двата знака *завой* или *направо*. Шахматна фигура *автомобил* се намира извън дъската и може да влезе в произволна гранична клетка (перпендикулярно на границата). Ако автомобилът влезе в клетка със знак направо, той се придвижва напред в същата посока. Ако влезе в клетка със знак завой, той може да завие на 90° наляво или надясно. В средната клетка на дъската има къща. Възможно ли е така да се поставят знаците, че автомобилът да не може да стигне до къщата?
5	4. Дадена е безкрайна редица от различни естествени числа. Всеки член на редицата след първия е равен или на средноаритметичното, или на средногеометричното на двата си съседни члена. Вярно ли е, че от известно място нататък всички членове на редицата са равни само на средноаритметичното на съседните си, или на тяхното средногеометрично?
6	5. Замък е ограден с крепостна стена с девет кули, като на кулите пазят рицари. На всеки час всеки рицар се премества на съседна кула, като всеки се движи или само по посока на часовниковата стрелка, или само в обратна посока. За една нощ всеки рицар е бил на всяка кула. Известно е, че е имало един час, през който на всяка кула е имало поне двама рицари, а също е имало час, през който на точно пет кули е имало само по един рицар. Докажете, че е имало час, през който на някоя кула не е имало рицари.
7	6. В равнобедрен триъгълник ABC ъгълът при върха C е равен на 120°. От C във вътрешността на триъгълника са построени два лъча, които сключват ъгъл 60°. Лъчите достигат страната AB, отразяват се от нея (по правилото "ъгълът на падане е равен на ъгъла на отразяване") и достигат бедрата AC и BC. Така дадения триъгълник се разделя на пет триъгълника; от тях разглеждаме трите със страна върху AB. Да се докаже, че лицето на средния е равно на сбора от лицата на другите два.
9	7. Символът $\binom{n}{k}$ означава броя на начините, по които от множество от n предмета могат да се изберат k предмета (подредбата е без значение). Да се докаже, че ако k и l са естествени числа, по-малки от n, то числата $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{l}$ не са взаимнопрости.