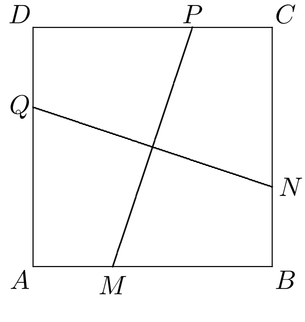
XXX МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ
Пролетен тур, ОСНОВЕН ВАРИАНТ за 7. – 9. клас
РЕШЕНИЯ

Задача 1. Васил и Петър играят следната игра. Първоначално на дъската са записани числата $\dfrac{1}{2008}$ и $\dfrac{1}{2009}$. На всеки ход Васил избира произволно число x, след което Петър избира едното от двете числа и го увеличава с x. Васил печели, ако на дъската се появи числото 1. Може ли Васил да победи, независимо от играта на Петър?

Решение. Васил започва с избора на $\dfrac{2007}{2008}$. Ако Петър прибави това число към $\dfrac{1}{2008}$, Васил печели; затова Петър прибавя $\dfrac{2007}{2008}$ към $\dfrac{1}{2009}$. Така на дъската са записани $\dfrac{1}{2008}$ и $\dfrac{4034071}{4034072}$.
На следващия си ход Васил избира $\dfrac{1}{4034072}$ и, за да не загуби, Петър прибавя това число към $\dfrac{1}{2008}$. Като продължи да избира $\dfrac{1}{4034072}$ още 4032062 пъти, Васил ще доведе играта до ситуация, в която на дъската са записани две равни числа. Като избере $\dfrac{1}{4034072}$ още веднъж, Васил ще спечели.

Задача 2. а) Да се докаже, че съществува многоъгълник, който може да бъде разделен с отсечка на две еднакви части, като единият край на отсечката е среда на страна на многоъгълника, а другият край дели някоя страна в отношение 1 : 2.
б) Съществува ли изпъкнал многоъгълник с това свойство?

Решение. Ще покажем пример на изпъкнал многоъгълник с желаното свойство. Страните на квадрата $ABCD$ са разделени в отношение 1 : 2 от точките M, N, P, Q:



Отсечките MP и NQ се разполовяват от центъра на квадрата и разделят квадрата на четири еднакви четириъгълника. Четириъгълникът $ABNQ$ изпълнява условието на задачата.

Задача 3. Във всяка клетка на дъска 101×101, освен в централната, е поставен един от двата знака "завой"или "направо". Шахматна фигура "автомобил"се намира извън дъската и може да влезе в произволна гранична клетка (перпендикулярно на границата). Ако автомобилът влезе в клетка със знак "направо той се придвижва напред в същата посока. Ако влезе в клетка със знак "завой той може да завие на 90° наляво или надясно. В средната клетка на дъската има къща. Възможно ли е така да се поставят знаците, че автомобилът да не може да стигне до къщата?

Решение. Да разпределим клетките в 51 концентрични слоя. Къщата е единствената клетка в нулевия слой, осемте клетки около нея формират първия слой и т.н. Да допуснем, че автомобилът тръгва от къщата и се придвижва в клетка от първия слой. Той може да използва следната стратегия, за да мине в следващ слой и, в крайна сметка, да пресече границата на дъската.
Когато автомобилът влиза от $(n-1)$-вия слой в клетка от n-тия слой, ако знакът в тази клетка е "направо автомобилът преминава в клетка от $(n+1)$-вия слой. Ако знакът е "завой автомобилът завива към ъглова клетка на n-тия слой. Ако пътят към ъгловата клетка минава през клетка със "завой от нея автомобилът излиза към $(n+1)$-вия слой. Ако това не се случи и автомобилът стигне ъглова клетка на n-тия слой, от нея (независимо какъв е знакът) може да премине в $(n+1)$-вия слой.
По този начин, автомобилът намира път, по който да напусне дъската.
По обратния път автомобилът може да стигне до къщата.

Задача 4. Дадена е безкрайна редица от различни естествени числа. Всеки член на редицата след първия е равен или на средноаритметичното, или на средногеометричното на двата си съседни члена. Вярно ли е, че от известно място нататък всички членове на редицата са равни само на средноаритметичното на съседните си, или на тяхното средногеометрично?

Решение. Да разгледаме редица, дефинирана с равенствата $a_{2k-1} = k^2$ и $a_{2k} = k(k+1)$ за всяко $k \geq 1$. Имаме

$$\sqrt{a_{2k-1}a_{2k+1}} = \sqrt{k^2(k+1)^2} = k(k+1) = a_{2k}$$

и

$$\frac{1}{2}(a_{2k} + a_{2k+2}) = \frac{1}{2}(k(k+1) + (k+1)(k+2)) = (k+1)^2 = a_{2k+1},$$

т.е. в тази редица средноаритметично и средногеометрично се редуват.

Задача 5. Замък е ограден с крепостна стена с девет кули, като на кулите пазят рицари. На всеки час всеки рицар се премества на съседна кула, като всеки се движи или само по посока на часовниковата стрелка, или само в обратна посока. За една нощ всеки рицар е бил на всяка кула. Известно е, че е имало един час, през който на всяка кула е имало поне двама рицари, а също е имало час, през който на точно пет кули е имало само по един рицар. Докажете, че е имало час, през който на някоя кула не е имало рицари.

Решение. Ще наричаме "група" рицарите, които се движат заедно. Тъй като е имало момент, когато на пет кули е имало само по един рицар, то има пет групи от по един рицар (единични групи). В този момент на всяка от останалите четири кули е имало най-много по две групи, затова групите са най-много 13, като най-много четири неединични групи се движат в една и съща посока.
Нека броят на групите, които се движат по посока на часовниковата стрелка е не по-малък от броя на групите, които се движат в обратната посока. Тогава групите обратно на часовниковата стрелка са най-много шест.
Да допуснем, че по посока на часовниковата стрелка се движат девет групи; тогава в обратна посока са най-много четири. Освен това, най-много четири неединични групи се движат в една и съща посока, следователно и петте единични групи се движат по часовниковата стрелка. Тъй като в обратна посока се движат най-много четири групи, то всеки час една единична група пази сама. Това е противоречие с условието, че има час, когато на всяка кула е имало поне двама рицари.
Следователно по посока на часовниковата стрелка се движат най-много осем групи; всеки час има една кула – ще я наричаме *проблемна*, – която не е пазена от тях и проблемната кула на всеки час се "мести"към съседната си по часовниковата стрелка. Ако в проблемната кула има група, движеща се обратно на часовниковата стрелка, тази група ще пази отново проблемна кула след 9 часа. И тъй като групите, движещи се обратно на часовниковата стрелка, са най-много шест, в интервала от 9 часа има момент, когато проблемната кула е празна.

Задача 6. В равнобедрен триъгълник ABC ъгълът при върха C е равен на $120°$. От C във вътрешността на триъгълника са построени два лъча, които сключват ъгъл $60°$. Лъчите достигат страната AB, отразяват се от нея (по правилото "ъгълът на падане е равен на ъгъла на отразяване") и достигат бедрата AC и BC. Така даденият триъгълник се разделя на пет триъгълника; от тях разглеждаме трите със страна върху AB. Да се докаже, че лицето на средния е равно на сбора от лицата на другите два.

Решение. Нека единият лъч се отразява от AB в точка D и стига AC в точка F, а другият се отразява от AB в точка E и стига AC в точка G. С C', F' и G' означаваме точките, симетрични съответно на C, F и G относно AB. Тъй като ъгълът на падане е равен на ъгъла на отразяване, получаваме, че $F' \in CD$ и $G' \in CE$.
Триъгълниците $CC'A$ и $CC'B$ са равностранни, а от равенството $\angle ACC' = \angle F'CG' = 60^\circ$ следва, че $\angle ACF' = \angle C'CG'$. Получаваме, че триъгълниците ACF' и $C'CG'$ са еднакви и изразяваме лицата им (точка H е средата на основата AB):

$$\begin{aligned}
[ACF'] = [AF'D] + [ADC] &= [ADF] + ([AHC] - [DHC]) \\
&= [ADF] + \frac{1}{2}[ABC] - [DHC] \\
[C'CG'] = [C'G'EH] + [HEC] &= [HC'B] - [EG'B]) + [HEC] \\
&= \frac{1}{2}[ABC] - [EGB] + [HEC].
\end{aligned}$$

Като приравним изразите и преобразуваме, получаваме

$$[ADF] + [EGB] = [DHC] + [HEC] = [DEC],$$

което трябваше да докажем.

Задача 7. Символът $\binom{n}{k}$ означава броя на начините, по които от множество от n предмета могат да се изберат k предмета (подредбата е без значение). Да се докаже, че ако k и l са естествени числа, по-малки от n, то числата $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{l}$ не са взаимнопрости.

Решение. Нека $0 < k < l < n$. Тогава

$$\binom{l}{k} < \binom{n}{k}. \tag{1}$$

Да допуснем, че от n играчи трябва да се избере отбор от l члена, като k от тях се определят за капитани. Отборът може да се избере по $\binom{n}{l}$ начина, а капитаните в отбора – по $\binom{l}{k}$ начина, т.е. изборът може да се осъществи по $\binom{n}{l}.\binom{l}{k}$ начина.
От друга страна, може първо да се изберат капитаните по $\binom{n}{k}$ начина, а след това отборът да се допълни с $l-k$ от останалите $n-k$ играчи, за което има $\binom{n-k}{l-k}$ възможности. Така изборът може да се осъществи по $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}$ начина. Получихме равенството

$$\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}.$$

Оттук $\binom{n}{k}$ дели произведението $\binom{n}{l}\binom{l}{k}$. Ако допуснем, че $\binom{n}{k}$ е взаимнопросто с $\binom{n}{l}$, то $\binom{n}{k}$ дели $\binom{l}{k}$, което противоречи на (1).