XXX МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ
Пролетен тур, ТРЕНИРОВЪЧЕН ВАРИАНТ за 10. – 12. клас
РЕШЕНИЯ

Задача 1. С $a \wedge b$ означаваме числото a^b. За определяне на реда на операциите в израза $7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7$ трябва да се поставят скоби (необходими са пет двойки скоби). Възможно ли е скобите да се поставят по два различни начина, но стойностите, които се получават, да са равни?

Решение. В сила е следното равенство:

$$(n \wedge (n \wedge n)) \wedge n = (n^{n \wedge n})^n = (n^n)^{n \wedge n} = (n \wedge n) \wedge (n \wedge n).$$

Ясно е, че като допишем от двете му страни еднакви изрази, ще получим равни стойности.

Задача 2. В равнината са дадени краен брой точки, никои три от които не лежат на една права. Някои точки са свързани с отсечки. Известно е, че всяка права, която не минава през някоя от дадените точки, пресича четен брой от построените отсечки. Да се докаже, че всяка точка е край на четен брой отсечки.

Решение. Да допуснем, че точка A е свързана с нечетен брой от дадените точки. Тогава сред тях има и друга точка B със същото свойство (броят на нечетните върхове е четен). Да разгледаме права, успоредна на правата AB и много близо до нея. Тя пресича a отсечки с край A, b отсечки с край B и c отсечки, които не са свързани нито с A, нито с B, като $a+b+c$ е четно число.
Бавно въртим тази права, като A остава в една и съща полуравнна спрямо нея, докато B мине в противоположната полуравнина. В това положение, правата пресича предишните a отсечки с край A и c отсечки, които не са свързани нито с A, нито с B, както и d отсечки с край B (без да се брои AB).
Ако точките A и B са свързани, то B е край на $b+d+1$ отсечки, и тъй като това е нечетно число, то b и d са с еднаква четност, а разликата $d-b$ е четна. Броят на отсечките, които правата пресича, е $1+a+d+c = 1+a+b+c+(d-b)$, т.е. нечетен.
Ако точките A и B не са свързани, , то B е край на $b+d$ отсечки, и тъй като това е нечетно число, то разликата $d-b$ също е нечетна. Броят на отсечките, които правата пресича, е $a+d+c = a+b+c+(d-b)$, нечетен.
И в двата случая получихме противоречие.

Задача 3. За всяко естествено число n с $O(n)$ означаваме неговия най-голям нечетен делител. За произволни естествени числа a и b разглеждаме редицата от естествени числа, зададена с равенствата
$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$ за $n = 3, 4, \ldots$.
а) Да се докаже, че от известно място нататък всички членове на редицата са равни на едно и също естествено число.
б) Как може да се определи това естествено число, ако знаем числата a и b?

Решение. а) Ясно е, че от третия член нататък редицата включва нечетни числа. За $n \geq 3$ имаме

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2^t}$$

за някое $t \geq 1$. Ако $x_{n+1} = x_n$, то $t = 1$ и $x_{n+2} = x_{n+1}$, т.е. оттук нататък членовете на редицата са равни. В обратен случай,

$$x_{n+2} < \max\{x_{n+1}, x_n\}.$$

Аналогично

$$x_{n+3} < \max\{x_{n+2}, x_{n+1}\}.$$

Ако $x_n < x_{n+1}$, получаваме $x_{n+2} < x_{n+1}, \quad x_{n+3} < x_{n+1}$.
Ако $x_n > x_{n+1}$, получаваме $x_{n+2} < x_n, \quad x_{n+3} < x_n$.
И в двата случая е изпълнено неравенството

$$\max\{x_{n+3}, x_{n+2}\} < \max\{x_{n+1}, x_n\}.$$

Тъй като членовете на редицата са естествени числа, безкрайно намаляване не е възможно и следователно от известно място нататък членовете на редицата ще станат равни.
б) Ще докажем, че търсената константа е най-големият общ нечетен делител g на a и b. Ясно е, че g дели всяко x_n. По индукция получаваме, че най-големият общ нечетен делител на x_n и x_{n+1} за всяко n е равен също на g. Оттук, когато редицата стане константна, g ще е най-големят нечетен делител на две равни нечетни числа. Следователно търсената константа е равна на g.

Задача 4. Върху права са написани няколко нули и няколко единици. Разглеждаме всички двойки цифри (не непременно съседни), за които лявата цифра е 1, а дясната е 0. Нека M е броят на онези от разглежданите двойки, за които единицата и нулата са разделени от четен брой цифри и нека N е броят на на онези от разглежданите двойки, за които единицата и нулата са разделени от нечетен брой цифри. Да се докаже, че $M \geq N$.

Решение. Ще докажем, че като се изтрият две последователни нули в редицата, разликата $M - N$ не се променя. Двойките, чиято нула е вляво от изтритите, се запазват; също и тези, чиято единица е вдясно от изтритите. За двойките $(1, 0)$, чиито нули са вдясно от изтритите, броят цифри между единицата и нулата запазва четността си. Ако с изтриването на лявата от двете нули се губи двойка от едното множество, то с изтриването на дясната нула се губи двойка (със същата единица) и от другото множество; и обратно. Следователно разликата $M - N$ не се променя.
Аналогично, тази разлика няма да се промени и като се изтрият две последователни единици.
Да разгледаме редицата, която се получава след изтриване на всяка двойка равни последователни цифри. Ако в тази редица най-лявата цифра е нула или най-дясната е единица, можем да ги изтрием (те не образуват двойки в разглежданите множества). Сега, ако получената редица се състои от нула цифри, то $M = N$. Ако редицата се състои от поне две цифри, тя има вида $1010\ldots10$. Между всяка единица и всяка нула в тази редица има четен брой цифри. Следователно $M - N > 0$, т.е. $M > N$.

Задача 5. Във вътрешността на тетраедър е избрана произволна точка X. През всеки връх на тетраедъра е построена права, която е успоредна на правата, минаваща през X и медицентъра на срещуположната на този връх стена. Да се докаже, че тези четири прави се пресичат в една точка.

Решение. Нека O е център на тежестта на тетраедъра $ABCD$, а G е медицентър на стената BCD. Тогава O лежи на AG и $AO = 3OG$.
Нека P е точка от продължението на XO след O, за която $PO = 3OX$. Тогава триъгълниците GOX и AOP са подобни, откъдето получаваме, че правите XG и AP са успоредни.
Следователно дадените четири прави се пресичат в точка P.