XXX МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ
Пролетен тур, ТРЕНИРОВЪЧЕН ВАРИАНТ за 7. – 9. клас
РЕШЕНИЯ

Задача 1. В изпъкнал 2009-ъгълник са построени всички диагонали. Права пресича 2009-ъгълника, като не минава през нито един негов връх. Да се докаже, че правата пресича четен брой диагонали.

Решение. Дадената права определя две полуравнини; нека m върха на изпъкналия 2009-ъгълник в една от полуравнините, а останалите n върха са в другата. Тъй като $m + n = 2009$, то едно от числата m и n е четно, а другото е нечетно. Следователно произведението им mn е четно.
Правата пресича точно отсечките с краища в различни полуравнини спрямо нея. Тъй като в едната полуравнина има m върха, а в другата – n, то отсечките с краища в различни полуравнни са mn на брой. Две от тях са страни на 2009-ъгълника, а останалите $mn - 2$ са диагонали. Следователно правата пресича $mn - 2$ диагонала на 2009-ъгълника, а това е четно число.

Задача 2. С $a \wedge b$ означаваме числото a^b. За определяне на реда на операциите в израза $7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7 \wedge 7$ трябва да се поставят скоби (необходими са пет двойки скоби). Възможно ли е скобите да се поставят по два различни начина, но стойностите, които се получават, да са равни?

Решение. В сила е следното равенство:

$$(n \wedge (n \wedge n)) \wedge n = (n^{n \wedge n})^n = (n^n)^{n \wedge n} = (n \wedge n) \wedge (n \wedge n).$$

Ясно е, че като допишем от двете му страни еднакви изрази, ще получим равни стойности.

Задача 3. Владо иска да напише по едно число на всяка от стените на няколко кубчета така, че да може да получи всяко 30-цифрено число, като подреди някои от кубчетата едно до друго. Колко най-малко кубчета са му необходими?

Решение. Владо може да подреди произволна редица от шест цифри, като вземе следния комплект от 10 кубчета (защото всяка цифра е записана на шест кубчета в комплекта):

куб 1	1	2	3	4	5	6									
куб 2		2	3	4	5	6	7								
куб 3			3	4	5	6	7	8							
куб 4				4	5	6	7	8	9						
куб 5					5	6	7	8	9	0					
куб 6						6	7	8	9	0	1				
куб 7							7	8	9	0	1	2			
куб 8								8	9	0	1	2	3		
куб 9									9	0	1	2	3	4	
куб 10										0	1	2	3	4	5

Следователно Владо може да подреди всяко 30-цифрено число с пет такива комплекта, т.е. с общо 50 кубчета.
От друга страна, за да може Владо да подреди число, записано с 30 еднакви цифри, той трябва да има 30 кубчета, на които е записана тази цифра. Цифрата 0 е записана на поне 29 кубчета. Така кубчетата са поне $\frac{1}{6}.(9.30+29) = 49\frac{5}{6}$, т.е. броят им е най-малко 50.

Задача 4. Като увеличим естественото число a с 10%, получаваме естествено число b. Възможно ли е сборът от цифрите на b да е с 10% по-малък от сбора на цифрите на a?

Решение. Ще намерим число с исканото свойство, което е от вида

$$a = \overline{\underbrace{88\ldots88}_{m}0}$$

(записано е с m осмици и нула). Да увеличим a с 10%:

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & 8 & \ldots & 8 & 8 & 8 & 0 \\ + & 8 & 8 & \ldots & 8 & 8 & 8 \\ \hline 9 & 7 & 7 & \ldots & 7 & 6 & 8 \end{array}$$

В записа на полученото число b участват по една цифра 9, 6 и 8 и $m-2$ на брой цифри 7. Сборът на цифрите на b е с 10% по-малък от сбора на цифрите на a, точно когато е изпълнено равенството

$$9+6+8+7(m-2) = 90\%\ (8m).$$

Оттук намираме $m = 45$.

Забележка. Най-малкото число, което удовлетворява условието на задачата, е 909 999 999 990.

Задача 5. Даден е ромб $ABCD$, за който $\angle A = 120^\circ$. Точките M и N от страните BC и CD са такива, че $\angle NAM = 30^\circ$. Да се докаже, че центърът на описаната около $\triangle NAM$ окръжност лежи на диагонал на ромба.

Решение. Нека O е центърът на описаната около $\triangle NAM$ окръжност. Тогава $\angle NOM = 2\angle NAM = 60^\circ$. Следователно $\triangle NOM$ е равностранен. Тъй като $\angle NOM + \angle NCM = 180^\circ$, то четириъгълникът $CMON$ е вписан в окръжност. Оттук

$$\angle OCM = \angle ONM = 60^\circ = \angle OMN = \angle OCN.$$

Следователно точка O лежи на ъглополовящата на $\angle MCN$, т.е. на диагонала AC на ромба.