XXX МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур, ОСНОВЕН ВАРИАНТ за 10. – 12. клас

Задача 1. Дадена е квадратна дъска. Построени са успоредни на страните ѝ прави (по 7 прави във всяко направление), които разделят дъската на 64 правоъгълни полета. Тези полета са оцветени шахматно. Размерите им могат да са различни, но е известно, че отношението на лицето на всяко бяло поле към лицето на всяко черно поле не надхвърля 2. Намерете най-голямата възможна стойност на отношението на общото лице на белите полета към общото лице на черните полета.

Решение: Да разгледаме правоъгълниците, на които се разделя дъската от втората, четвъртата и шестата вертикални и хоризонтални прави. Всеки от тези 16 правоъгълника съдържа четири шахматно оцветени правоъгълника. За всеки от 16-те правоъгълника ще докажем, че отношението на общото лице на белите полета към общото лице на черните полета не надхвърля $\dfrac{5}{4}$.

Нека правоъгълник $a \times b$ е разделен на четири шахматно оцветени правоъгълника и нека един от белите правоъгълници е с размери $x \times y$. Тогава другият бял правоъгълник е $(a-x) \times (b-y)$, а размерите на черните са $(a-x) \times y$ и $x \times (b-y)$. От условието лицето на всяко бяло поле да не надхвърля удвоеното лице на всяко черно поле получаваме

$$\frac{a}{3} \le x \le \frac{2a}{3}, \quad \frac{b}{3} \le y \le \frac{2b}{3}.$$

Тогава е в сила неравенството

$$(3x-2a)(3y-b) + (3y-2b)(3x-a) \le 0,$$

което е еквивалентно на

$$xy + (a-x)(b-y) \le \frac{5}{4}((a-x)y + x(b-y),$$

т.е. общото лице на белите полета не надхвърля $\dfrac{5}{4}$ от към общото лице на черните полета.

Тъй като за всеки от 16-те правоъгълника отношението на общото лице на белите полета към общото лице на черните полета не надхвърля $\dfrac{5}{4}$, това свойство е в сила и за цялата дъска.

Стойността $\dfrac{5}{4}$ се достига, като разделим дъската на 16 еднакви квадрата и за всеки от тях изберем $x = \dfrac{a}{3}$ и $y = \dfrac{b}{3}$.

Задача 2. Пространството е разбито на еднакви кубове. Вярно ли е, че всеки от тях има обща стена с някой от останалите кубове?

Решение: Ще докажем, че не е задължително всеки куб да има обща стена с някой от останалите. Нека разгледаме стандартно пакетиране на пространството с единични кубове и да изберем един от кубовете – C. Двете кубчета, "залепени"пред и зад C, принадлежат на два безкрайни стълба от единични кубчета, успоредни на оста Ox. По същия начин, двете кубчета, които са залепени отляво и отдясно на C принадлежат на два безкрайни стълба единични кубчета, успоредни на Oz. Двете кубчета, които са залепени отгоре и отдолу на C принадлежат на два безкрайни стълба, успоредни на Oy. Тези шест стълба не се пресичат. Като транслираме всяко кубче от тези стълбове на половин единица (първите два стълба по направление на Ox, следващите два – по Oz, последните два – по Oy), ще получим пакетиране на пространството, при което C няма цяла обща стена с нито един от останалите кубове.

Задача 3. На маса са дадени $N > 2$ купчини, всяка от които съдържа един орех. Двама играчи се редуват, като за един ход могат да обединят две купчини, ако броят на орехите в едната е взаимнопрост с броя на орехите в другата. Побеждава играчът, който направи последния ход. За всяко N определете кой от играчите има печеливша стратегия.

Решение: Ще докажем, че вторият играч винаги може да спечели.
Ще наричаме купчина с четен брой орехи *четна*, а измежду купчините с нечетен брой орехи тези с един орех ще наричаме *малки*, а останалите – *големи*.
Нека N е нечетно. Първият играч с първия си ход трябва да направи четна купчина с два ореха, след което вторият я обединява с малка кучина в голяма. Стратегията на втория играч е след всеки ход да оставя една голяма и четен брой малки купчини. Така при всеки ход първият играч трябва да създаде четна купчина и тя ще е единствената четна кучина в момента. Ако това обединяване е включвало голямата купчина, вторият играч обединява четната кучина с малка. Ако ходът на първия играч не включва голямата купчина, по четната купчина съдържа два ореха и вторият играч може да я обедини с голямата. По такъв начин вторият играч винаги има ход и печели.
Нека N е четно. Вторият играч използва същата стратегия, докато се стигне до ситуация с една голяма и три малки купчини (или 4 малки при $n = 4$). Когато първият играч още веднъж създаде четна купчина, вторият обединява другите две купчини във втора четна купчина. Така вторият не може да направи ход и първият побеждава.

Задача 4. Даден е неравнобедрен трапец $ABCD$. Описаната около $\triangle BCD$ окръжност пресича правата AC в точка A_1 (различна от C). Аналогично се определят точките B_1, C_1 и D_1. Докажете, че $A_1B_1C_1D_1$ също е трапец.

Решение: Нека O е пресечната точка на AC и BD. Четириъгълникът A_1BCD е вписани и оттук $A_1O.OC = BO.DO$. Аналогично получаваме равенствата $AO.OC_1 = BO.DO$, $AO.OC = B_1O.DO$ и $AO.OC = BO.D_1O$. От първите две равенства следва, че $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{A_1O}{OC_1}$, а от последните две $\dfrac{BO}{OD} = \dfrac{B_1O}{OD_1}$. Тъй като $ABCD$ е трапец, то $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{BO}{OD}$ и получаваме, че $\dfrac{A_1O}{OC_1} = \dfrac{B_1O}{OD_1}$, т.е. $A_1B_1C_1D_1$ също е трапец.

Задача 5. В безкрайната редица $a_1, a_2, a_3, \ldots$ числото a_1 е равно на 1, а всяко следващо число a_n се получава от предишното a_{n-1} по правилото: ако най-големият нечетен делител на n дава остатък 1 при деление на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, ако този остатък е равен на 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажете, че в тази редица всяко естествено число се среща безброй много пъти.
(Първите членове на редицата са: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, $\ldots$)

Решение: Ще докажем по индукция за m, че $a_{2^m-1} = 1$. Лесно се проверява, че при $m = 1$, 2 и 3 имаме $a_1 = a_3 = a_7 = 1$.
Нека за някое m имаме $a_{2^m-1} = 1$. Тъй като най-големият нечетен делител на 2^m е 1, то $a_{2^m} = a_{2^m-1} + 1 = 2$.
Да разгледаме как се получават a_{2^m+k}, където $1 \leq k \leq 2^m - 1$.
При $k \neq 2^{m-1}$, в представянето $k = 2^s.q$, където q е нечетно, имаме $s \leq k - 2$. Тогава $2^m + k = 2^m + 2^s.q = 2^s(2^{m-s} + q)$ и тъй като $m - s \geq 2$, то най-големият нечетен делител на $2^m + k$ е $2^{m-s} + q$ и той дава същия остатък при деление на 4, както и q – най-големият нечетен делител на $k = 2^s.q$.
При $k = 2^{m-1}$ получаваме $2^m + k = 3.2^{m-1}$ с най-голям нечетен делител 3, докато най-големият нечетен делител на 2^{m-1} е 1.
Това означава, че разликата $a_{2^{m+1}-1} - a_{2^m}$ е с 2 по-малка от разликата $a_{2^m-1} - a_0$ (приемаме $a_0 = 0$). Като използваме индукционното предположение, намираме $a_{2^{m+1}-1} = a_{2^m} + a_{2^m-1} - a_0 - 2 = 1$.
По-нататък ще докажем, че ако r е член на редицата, то $r + 2$ също е член на редицата. Оттук ще следва, че в редицата се срещат всички естествени числа (тъй като 1 и 2 са нейни членове).
Нека $r = a_k$ и $k < 2^m$. Както в а), получаваме $a_{2^{m+1}+k} - a_{2^{m+1}} = a_k - a_0$, откъдето следва, че $a_{2^{m+1}+k} = r + 2$.

Да допуснем, че естественото число r се среща краен брой пъти в редицата. След неговото последно появяване редицата не може да достигне по-голяма от r стойност, защото при намаляването ѝ към 1 отново ще се срещне r. Противоречие.

Задача 6. Многочленът $P(x)$ с реални коефициенти е такъв, че съществуват безброй много двойки цели числа (m, n), за които $P(m) + P(n) = 0$. Докажете, че графиката на функцията $y = P(x)$ има център на симетрия.

Решение: Можем да приемем, че старшият коефициент на $P(x)$ е равен на 1. Степента на многочлена $P(x)$ е нечетна, защото при четна степен за достатъчно големи по модул стойности на x ще имаме $P(x) > 0$, което означава, че могат да се намерят само краен брой двойки цели числа (m, n), за които $P(m) + P(n) = 0$.
Да отбележим, че от някое x нататък, $P(x)$ расте монотонно и клони към плюс (минус) безкрайност при x клонящо към плюс (минус) безкрайност. Също така, за всяко цяло m има краен брой числа n, за които $P(m) + P(n) = 0$ (броят им не надхвърля степента на многочлена).
От горните съображения следва, че за произволно число C съществуват цели числа m и n с различни знаци и по-големи по модул от C, за които $P(m) + P(n) = 0$.
Ако в многочлена $P(x) = x^k + ax^{k-1} + \dots$ (с $\dots$ означаваме многочлен от степен най-много $k-2$) заместим $x = x - \dfrac{a}{k}$, в получения многочлен $Q(x)$ коефициентът пред x^{k-1} ще е 0:

$$\begin{aligned} Q(x) &= P\left(x - \frac{a}{k}\right) = \left(x - \frac{a}{k}\right)^k + a\left(x - \frac{a}{k}\right)^{k-1} + \cdots \\ &= x^k - k.x^{k-1}.\frac{a}{k} + \cdots + ax^{k-1} + \cdots = x^k + R(x), \end{aligned}$$

където $R(x)$ е даден многочлен от степен най-много $k-2$.
Ще докажем, че $Q(x) = -Q(-x)$, откъдето следва, че графиката на $P(x)$ е симетрична с център на симетрия $\left(\dfrac{a}{k}, 0\right)$.
И така, многочленът $Q(x) = x^k + bx^{k-2} + \cdots$ и по условие уравнението $Q(m) + Q(n) = 0$ има безброй решения, за които числата $m + \dfrac{a}{k}$ и $n + \dfrac{a}{k}$ са цели. Да вземем достатъчно големи по модул решения $n > 0$ и $m < 0$. Ще докажем, че $|n| = |m|$. Да допуснем, че $|n| < |m|$; нека например $m = -n - 1$. Тогава

$$\begin{aligned} Q(n) + Q(m) &= Q(n) + Q(-n-1) \\ &= n^k + bn^{k-2} + \cdots + (-n-1)^k + b(-n-1)^{k-2} + \cdots \\ &= -kn^{k-1} + T(n), \end{aligned}$$

където $T(n)$ е даден многочлен от степен най-много $k-2$. За достатъчно големи по модул n стойността на kn^{k-1} ще е много по-голяма от $|T(n)|$ и следователно $-kn^{k-1}+T(n)<0$, т.е. $Q(n)+Q(m)<0$. При увеличаване на модула на m, сборът $Q(n)+Q(m)$ ще намалява още повече (тъй като намалява стойността на $Q(m)$). Следователно при достатъчно големи по модул решения $n>0$ и $m<0$ не може да е изпълнено неравенството $|n|<|m|$. Аналогично не може да е изпълнено и неравенството $|n|>|m|$. Следователно за безброй много числа n е изпълнено равенството $Q(n)+Q(-n)=0$. Щом многочленът $Q(x)+Q(-x)$ има безброй много корени, то той е тъждествено равен на 0. Получихме, че графиката на $Q(x)$ е симетрична спрямо точката $(0,0)$, а оттук графиката на $P(x)$ е симетрична спрямо точката $\left(\dfrac{a}{k},0\right)$.

Задача 7. Тест включва 30 въпроса, всеки от които е с два избираеми отговора (верен и грешен). За един опит Виктор отговаря на всички въпроси и получава съобщение за броя на верните отговори. Може ли Виктор да направи такива опити, че да разбере всички верни отговори с най-много:
а) 29 опита (и да отговори вярно на всички въпроси при 30-я опит);
б) 24 опита (и да отговори вярно на всички въпроси при 25-я опит)?
(В началото Виктор не знае нито един отговор и при всеки опит попълва един и същ тест.)
а) Виктор може да направи 29 опита, като при k-ия опит отговаря *да* на k-ия въпрос, а на всички останали отговаря *не*. Всеки два опита се отличават в точно два отговора, следователно броят на верните отговори при всеки два опита е равен или се различава с 2.
Ако броят на верните отговори от i-ия и j-ия се различава с 2, това определя верния отговор на i-ия и j-ия въпрос. След това, като се сравни резултата от i-ия тест с останалите, се определят и отговорите на първите 29 въпроса. Като знаем отговорите на първите 29 въпроса, от броя верни отговори при първия опит определяме верния отговор на 30-ия въпрос.
Ако броят на верните отговори при всички опити е един и същ, това означава, че верният отговор на първите 29 въпроса е един и същ (или на всичките е *да*, или на всичките е *не*). Тогава броят на верните отговори при първия опит 30, 2, 1 или 0 и еднозначно определя верните отговори на всички въпроси.
б) Да разбием въпросите в теста на групи от по пет: въпроси от 1 до 5, от 6 до 10 и т.н.
При първия опит да отговорим на всички въпроси с *не*. Ще покажем как с 4 опита могат да се разберат отговорите на въпросите от първата група. Нека на въпросите от 6-ти нататък отговорим с *не*, а на останалите по схемата:

	опит 2	опит 3	опит 4	опит 5
въпрос 1	*да*	*не*	*не*	*не*
въпрос 2	*да*	*не*	*да*	*да*
въпрос 3	*да*	*да*	*не*	*да*
въпрос 4	*да*	*да*	*да*	*не*
въпрос 5	*да*	*да*	*да*	*да*

Да отбележим, че резултатите от първия и втория опит определят еднозначно на колко от първите пет въпроса е даден верен отговор при първия опит. Това означава, че ако знаем верните отговори на първите четири въпроса, ще определим верния отговор на петия.
Ако при втория опит и на двата въпроса 1 и 2 сме отговорили вярно или и на двата – грешно, то след третия опит ще знаем верните отговори на въпроси 1 и 2. Тогава след четвъртия опит ще можем да определим верния отговор на въпрос 3, а след петия опит – на въпрос 4. Това, както отбелязахме, е определя верния отговор на въпрос 5.
Аналогично може да се разсъждава с двойките въпроси (1, 3) и (1, 4). Значи остава случая, когато при втория опит сме отговорили вярно на точно един от въпросите 1 и 2; на точно един от въпросите 1 и 3; на точно един от въпросите 1 и 4. Това означава, че при втория опит отговорите на въпроси 2, 3 и 4 са или всички верни, или всички грешни. Коя от тези възможности е изпълнена определяме лесно, защото знаем на колко от първите пет въпроса е даден верен отговор при втория опит. Това означава, че сме определили верните отговори на първите четири въпроса, а оттук намираме верния отговор на въпрос 5.
Аналогично за следващите 4 групи от по 5 въпроса определяме верните отговори с 4 опита. Така с $1 + 5.4 = 21$ опита са определени верните отговори на първите 25 въпроса. Тъй като оттук знаем на колко от последните пет въпроса е отговорено вярно при първия опит, верните отговори на последната група определяме с 3 опита. Така 24 опита са достатъчни.