XXX МЕЖДУНАРОДЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур, ОСНОВЕН ВАРИАНТ за 7. – 9. клас

Задача 1. На шахматно оцветена дъска 100×100 са поставени 100 царици така, че никои две от тях не се заплашват. Докажете, че във всеки ъглов квадрат 50×50 е поставена поне една царица.

Решение: Да разгледаме четирите ъглови квадрата 50×50:

северо-западен	северо-източен
юго-западен	юго-източен

и да допуснем, че в северозападния няма нито една царица. Тъй като в северната половина от дъската са поставени 50 царици (както и в южната – по една във всеки ред), то тези 50 царици са в североизточния квадрат. По същия начин, има 50 царици в западната половина от дъската и те са в югозападния квадрат.
От друга страна, двата квадрата – югозападният и североизточният, – се покриват от 99 диагонала на дадената дъска (един с дължина 100, успоредно на него два с дължина 99 и т.н., до два с дължина 50). По принципа на Дирихле, някои две от общо стоте царици в югозападния и североизточния квадрат лежат на един диагонал, т.е. се заплашват. Противоречие; следователно всеки ъглов квадрат 50×50 е поставена поне една царица.

Задача 2. Дадени са четири камъка, всеки от които тежи цяло число грамове. Дадена е везна с две блюда, която отчита разликата в теглата на лявото и дясното блюдо. Може ли с четири претегляния да се определи теглото на всеки камък, ако при едно от претеглянията е възможна грешка от 1 грам?

Решение: Нека теглата на камъните са a, b, c и d. Да разгледаме следните 4 претегляния.
1. На едната страна на везната поставяме a и b, а на другата c и d.
2. На едната страна на везната поставяме a и c, а на другата b и d.
3. На едната страна на везната поставяме a и d, а на другата b и c.
4. Едната страна на везната оставяме празна, а на дрегата поставяме a, b, c и d.
Нека $b = a+x$, $c = a+y$ и $d = a+z$. Като съберем резултатите от първите 3 претегляния ще знаем разликата между теглата на $3a + (b + c + d)$ и $2(b + c + d)$, което е равно на $x + y + z$ или точно, или с грешка от 1 грам. От четвъртото претегляне знаем $a+b+c+d = 4a+(x+y+z)$ или точно или с грешка от 1 грам. При това само при едно от претеглянията

е възможна грешка от 1 грам. Следователно знаем или точното тегло на $4a$ или с разлика от 1 грам. Тъй като $4a$ се дели на 4, то можем да определим точната стойност на a. Аналогично могат да се определят и теглата на останалите камъни.

Задача 3. Серж нарисувал триъгълник ABC и построил медианата AD. След това съобщил на Иля дължината на медианата AD и дължината на страната AC. По тази информация Иля доказал, че $\angle CAB$ е тъп, а $\angle DAB$ е остър. Намерете отношението $AD : AC$ (и докажете, че за всеки триъгълник с това отношение е в сила твърдението на Иля).

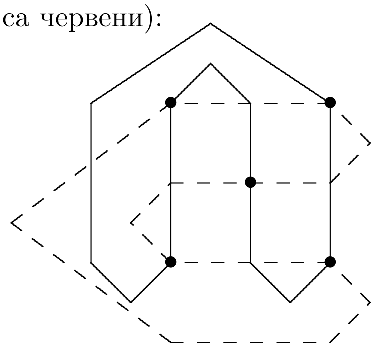
Решение: Ще докажем, че $AD : AC = \dfrac{1}{2}$. Нека точка A_1 от правата AD е такава, че D е средата на отсечката AA_1. Тогава ABA_1C е успоредник (диагоналите му се разполовяват).

Ако $AD : AC = \dfrac{1}{2}$, то $AA_1 = AC$. Това означава, че триъгълникът AA_1C е равнобедрен с основа A_1C. Следователно ъглите при основата, $\sphericalangle ACA_1$ и $\sphericalangle AA_1C$, са остри. Тогава $\sphericalangle CAB = 180°- \sphericalangle ACA_1 > 90°$ и $\sphericalangle DAB = \sphericalangle AA_1C < 90°$ – това са доказаните от Иля твърдения.

Нека $AD : AC \neq \dfrac{1}{2}$. Тогава на чертежа на Серж триъгълникът AA_1C може да е правоъгълен с хипотенуза по-голямата от страните AA_1 и AC. В първия случай следва, че $\sphericalangle CAB$ е прав, а във втория – че $\sphericalangle DAB$ е прав; т.е. не може да се докаже твърдението на Иля.

Задача 4. Барон Мюнхаузен разказва, че притежава карта на страната Оз. На картата има пет града, всеки два от които са свързани с директен път (т.е. път, който не минава през друг град). Всеки път на картата пресича не повече от един друг път (и не повече от веднъж). На картата пътищата са жълти или червени и при обхождане на всеки град (по границата), цветовете на излизащите от него пътища се редуват. Възможно ли е барон Мюнхаузен да казва истината?

Решение: Ето примерна карта на страната Оз (пунктирните пътища са жълти, а останалите са червени):



Задача 5. Дадени са положителните числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Известно е, че $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \frac{1}{2}$. Докажете, че $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \cdots \cdot (1 + a_n) < 2$.

Решение: От неравенството между средноаритметично и средногеометрично следва, че

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) &\leq \left(\frac{(1+a_1)+(1+a_2)+\dots+(1+a_n)}{n}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}.\end{aligned}$$

От друга страна, за $m \geq 2$ имаме

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} \\ &< \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 3-\frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Тогава

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} < \sqrt{3-\frac{1}{2n}} < \sqrt{3} < 2.$$

Забележка. Може да се използва неравенството $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n} < e$, където $e = 2,71828...$ е неперовото число. Задачата позволява много решения, включително и с индукция.

Задача 6. Даден е неравнобедрен триъгълник ABC. Външно за триъгълника са построени равнобедрени триъгълници $AB'C$ и $CA'B$ с основи съответно AC и BC и ъгли при основите, равни на φ. Правата през върха C, перпендикулярна на $A'B'$, пресича симетралата на отсечката AB в точка C_1. Намерете $\angle AC_1B$.

Решение: Да означим с A_1 и B_1 средите съответно на BC и AC и нека пресечната точка на CC_1 и $A'B'$ е C'. Тогава $B'CC'B_1$ и $A'CC'A_1$ са вписани четириъгълници и следователно $\sphericalangle B'C'B_1 = \sphericalangle A'C'A_1 = \varphi$. Оттук получаваме, че $C'C_1$ е ъглополовяща на $\sphericalangle A_1C'B_1 = 180^\circ - 2\varphi$.

При хомотетия с център C и коефициент $\dfrac{1}{2}$ отсечката AB се изобразява в B_1A_1, а симетралата на AB – в симетралата на B_1A_1. Тъй като правата CC_1 се изобразява в себе си, то образът на точката C_1 при хомотетията е пресечната точка X на симетралата на B_1A_1 и правата CC_1. Тогава търсеният ъгъл $\sphericalangle AC_1B$ е равен на своя образ, $\sphericalangle B_1XA_1$.
От друга страна, в $\triangle A_1C'B_1$ пресечната точка X на ъглополовящата $C'C_1$ и симетралата на A_1B_1 лежи на описаната около триъгълника окръжност. Тогава $\sphericalangle B_1XA_1 = 180^\circ - \sphericalangle B_1C'A_1 = 2\varphi$.

Задача 7. В безкрайната редица $a_1, a_2, a_3, \dots$ числото a_1 е равно на 1, а всяко следващо число a_n се получава от предишното a_{n-1} по правилото: ако най-големият нечетен делител на n дава остатък 1 при деление на

4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, ако този остатък е равен на 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажете, че в тази редица:
а) числото 1 се среща безброй много пъти;
б) всяко естествено число се среща безброй много пъти.
(Първите членове на редицата са: 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, ...)

Решение: а) Ще докажем по индукция за m, че $a_{2^m-1} = 1$. Лесно се проверява, че при $m = 1$, 2 и 3 имаме $a_1 = a_3 = a_7 = 1$.
Нека за някое m имаме $a_{2^m-1} = 1$. Тъй като най-големият нечетен делител на 2^m е 1, то $a_{2^m} = a_{2^m-1} + 1 = 2$.
Да разгледаме как се получават a_{2^m+k}, където $1 \leq k \leq 2^m - 1$.
При $k \neq 2^{m-1}$, в представянето $k = 2^s.q$, където q е нечетно, имаме $s \leq k - 2$. Тогава $2^m + k = 2^m + 2^s.q = 2^s(2^{m-s} + q)$ и тъй като $m - s \geq 2$, то най-големият нечетен делител на $2^m + k$ е $2^{m-s} + q$ и той дава същия остатък при деление на 4, както и q – най-големият нечетен делител на $k = 2^s.q$.
При $k = 2^{m-1}$ получаваме $2^m + k = 3.2^{m-1}$ с най-голям нечетен делител 3, докато най-големият нечетен делител на 2^{m-1} е 1.
Това означава, че разликата $a_{2^{m+1}-1} - a_{2^m}$ е с 2 по-малка от разликата $a_{2^m-1} - a_0$ (приемаме $a_0 = 0$). Като използваме индукционното предположение, намираме $a_{2^{m+1}-1} = a_{2^m} + a_{2^m-1} - a_0 - 2 = 1$.
б) Ще докажем, че ако r е член на редицата, то $r + 2$ също е член на редицата. Оттук ще следва, че в редицата се срещат всички естествени числа (тъй като 1 и 2 са нейни членове).
Нека $r = a_k$ и $k < 2^m$. Както в а), получаваме $a_{2^{m+1}+k} - a_{2^{m+1}} = a_k - a_0$, откъдето следва, че $a_{2^{m+1}+k} = r + 2$.
Да допуснем, че естественото число r се среща краен брой пъти в редицата. След неговото последно появяване редицата не може да достигне по-голяма от r стойност, защото при намаляването ѝ към 1 отново ще се срещне r. Противоречие.