XXX МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур, ТРЕНИРОВЪЧЕН ВАРИАНТ за 10. – 12. клас

Задача 1. Алекс купил няколко кутии със сладки и записал броя на сладките във всяка кутия. Серж сложил по една сладка от всяка кутия в първата чиния, след това във втора чиния сложил по една сладка от всяка непразна кутия и т.н. Щом изпразнил всички кутии, Серж записал броя на сладките във всяка чиния. Докажете, че броят на различните числа, записани от Алекс, е равен на броя на различните числа, записани от Серж.

Решение: Да подредим кутиите в редица така, че броят на сладките в тях - отляво надясно - да образува ненамаляваща редица. При тази наредба, да представим броя на сладките във вид на хистограма. Ще казваме, че всички поредни стълбове с еднаква височина образуват "стъпало". Броят на "стъпалата"в хистограмата е равен на броя различни числа, записани от Алекс, както и на броя различни числа, записани от Серж.

Задача 2. Решете системата уравнения ($n > 2$):

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \cdots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \cdots + x_n + x_1} = \cdots$$
$$\cdots = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_1 + \cdots + x_{n-1}}; \qquad x_1 - x_2 = 1.$$

Решение: Като вдигнем на квадрат равенството

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \cdots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \cdots + x_n + x_1}$$

и от двете страни на полученото равенство извадим $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ и отново вдигнем на квадрат, стигаме до

$$x_1(x_2+\cdots+x_n) = x_2(x_3+\cdots+x_n+x_1) \iff (x_1-x_2)(x_3+\cdots+x_n) = 0.$$

Тъй като $x_1 - x_2 = 1$, то $x_3 + \cdots + x_n = 0$. Това означава, че $x_3 = \cdots = x_n = 0$, защото дефиниционното множество на системата е $x_i \geq 0$ за $i = 1..n$.
Ако $x_2 \neq 0$, то $x_3 - x_2 \neq 0$ и аналогично ще получим $x_1 + x_4 \cdots + x_n = 0$, откъдето $x_1 = 0$. Но тогава $x_2 = -1$, противоречие.
Следователно $x_2 = 0$ и $x_1 = 1$.

Задача 3. В окръжност с радиус 2 е вписан 30-ъгълник $A_1A_2 \ldots A_{30}$. Докажете, че на дъгите A_1A_2, A_2A_3,$\ldots$, $A_{30}A_1$ може да се избере по една точка (съответно B_1, B_2,$\ldots$,B_{30}) така, че лицето на 60-ъгълника $A_1B_1A_2B_2 \ldots A_{30}B_{30}$ да е равно като число на периметъра на 30-ъгълника $A_1A_2 \ldots A_{30}$.

Решение: Да означим средите на дъгите A_1A_2, A_2A_3,$\ldots$, $A_{30}A_1$ съответно с B_1, B_2, $\ldots$, B_{30}, а O е ценърът на окръжността. Шестдесетоъгълникът $A_1B_1A_2B_2 \ldots A_{30}B_{30}$ е съставен от $OA_1B_1A_2$, $OA_2B_2A_3$, $\ldots$, $OA_{30}B_{30}A_1$.

Всеки от тези четириъгълници има перпендикулярни диагонали. Следователно лицето на 60-ъгълника е равно на

$$\frac{1}{2}A_1A_2.OB_1 + \frac{1}{2}A_2A_3.OB_2 + \cdots \frac{1}{2}A_{30}A_1.OB_{30}.$$

Тъй като радиусът на окръжността е 2, то $OB_1 = OB_2 = \cdots = OB_{30} = 2$ и лицето на 60-ъгълника е равно на $A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots A_{30}A_1$, т.е. на периметъра на дадения 30-ъгълник.

Задача 4. Съществува ли аритметична прогресия от пет естествени числа, чието произведение е точна 2008-а степен на естествено число?

Решение: Нека изберем произволна аритметична прогресия от пет естествени числа; например 1, 2, 3, 4 и 5. Тяхното произведение е 120. Ако умножим всеки член със 120^n, ще получим нова аритметична прогресия с произведение 120^{5n+1}. Произведението е точна 2008-а степен, когато $5n+1$ да се дели на 2008. Понеже $5n+1 = 2.2008$ при $n = 403$, една възможна прогресия е

$$120^{403},\ 2.120^{403},\ 3.120^{403},\ 4.120^{403},\ 5.120^{403}.$$

Задача 5. На безкрайна квадратна мрежа са нарисувани няколко правоъгълника със страни върху линиите на мрежата. Всеки от тях се състои от нечетен брой квадратчета и никои два правоъгълника нямат общо квадратче. Докажете, че всеки правоъгълник може да се оцвети в един от четири цвята така, че контурите на едноцветните правоъгълници да не се пресичат.

Решение: Мислено разбиваме квадратна мрежа на квадрати със страна 2, полетата на всеки от които номерираме както е показано:

1	2
4	3

Тъй като страните на всеки от дадените правоъгълници са нечетни, то в четирите върха на всеки правоъгълник е записана една и съща цифра. Също така, във върховете на два правоъгълника с обща част от контура са записани различни цифри. Търсеното оцветяване получаваме, като означим с цифрите 1, 2, 3 и 4 четири различни цвята и всеки правоъгълник оцветим в цвета, съответстващ на цифрата във върховете му.