XXX МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур, ТРЕНИРОВЪЧЕН ВАРИАНТ за 7. – 9. клас

Задача 1. В 10 кутии са сложени моливи така, че всеки две кутии съдържат различен брой моливи. Всеки два молива от една и съща кутия са различни по цвят. Докажете, че от всяка кутия може да се избере по един молив така, че измежду избраните моливи да няма едноцветни.

Решение: Нека подредим кутиите в редица така, че броят на моливите в кутиите да се увеличвава отляво надясно. Тогава в първата отляво кутия от редицата има най-малко един молив, във втората – най-малко два и т.н.; в десетата кутия има най-малко 10 молива. От първата кутия вземаме произволен молив А; от втората можем да изберем молив Б с различен от цвета на А, тъй като там има поне два молива и те са разноцветни. В третата кутия има поне три молива с три различни цвята, следователно поне един от тях ще е разноцветен с А и Б; избираме него. Продължавайки по този начин, ще изберем 10 разноцветни молива.

Задача 2. Дадени са петдесет естествени числа, половината от които не надхвърлят 50, а останалите са по-големи от 50, но не надхвърлят 100. Разликата на никои две от дадените числа не е 0 или 50. Намерете сбора на петдесетте числа.

Решение: Ако от дадените естествени числа, по-големи от 50, извадим 50, нито една от получените разлики няма да е равна на някое от останалите дадени числа (тъй като разликата на никои две от дадените числа не е 50). Тогава 25-те разлики и 25-те дадени числа, по-малки от 50, са различни естествени числа от 1 до 50, т.е. те са всички естествени числа от 1 до 50. Сборът им е $1 + 2 + \cdots 50 = 25.51$, а сборът на всички дадени числа е

$$25.51 + 25.50 = 25.101 = 2525.$$

Задача 3. В окръжност с радиус 2 е вписан остроъгълен триъгълник $A_1A_2A_3$. Докажете, че на дъгите A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 може да се избере по една точка (съответно B_1, B_2, B_3) така, че лицето на шестоъгълника $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ да е равно като число на периметъра на триъгълника $A_1A_2A_3$.

Решение: Да означим средите на дъгите A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 съответно с B_1, B_2, B_3. Шестоъгълникът $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ е съставен от четириъгълниците $OA_1B_1A_2$, $OA_2B_2A_3$ и $OA_3B_3A_1$, където O е ценърът на окръжността. Всеки от тези четириъгълници има перпендикулярни диагонали. Следователно лицето на шестоъгълника $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ е

$$\frac{1}{2}A_1A_2.OB_1 + \frac{1}{2}A_2A_3.OB_2 + \frac{1}{2}A_3A_1.OB_3.$$

Тъй като радиусът на окръжността е 2, то $OB_1 = OB_2 = OB_3 = 2$ и лицето на шестоъгълника е равно на $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1$, т.е. на периметъра на триъгълника $A_1A_2A_3$.

Задача 4. Дадени са три различни естествени числа, едно от които е равно на полусбора на другите две. Възможно ли е произведението на тези три числа да е точна 2008-а степен на естествено число?

Решение: Нека изберем три различни естествени числа, едно от които е равно на полусбора на другите две; например 1, 2 и 3. Тяхното произведение е 6. Ако умножим всяко от числата 1, 2 и 3 с 6^n, ще получим нови три числа 6^n, 2.6^n и 3.6^n, които изпълняват условието едно от тях да е равно на полусбора на другите две. Тези числа имат произведение 6^{3n+1}. Остава да изберем n така, че $3n+1$ да се дели на 2008. Понеже $3n+1 = 2008$ при $n = 669$, едно от възможните решения е

$$6^{669},\ 2.6^{669},\ 3.6^{669}.$$

Задача 5. Няколко спортисти стартирали едновременно от единия край на права писта, като всеки бягал с различна (но постоянна) скорост. В края на пистата спортистите моментално се обръщали и хуквали обратно със същата скорост и т.н. Известно време след старта, всички спортисти се оказали в една и съща точка на пистата. Докажете, че им предстоят и други такива срещи.

Решение: Нека дължината на пистата е s и след време t всички спортисти са се намирали на разстояние x от старта (като $0 \le x \le s$). Изминатият от всеки спортист път е от вида $2s.k+x$ или $2s.k-x$, където k е естествено число (или 0). След време $2t$ пътят на всеки спортист ще е от вида $2s.2k + 2x$ или $2s.2k - 2x$. Това означава, че:

– при $0 \le x \le \dfrac{1}{2}s$, всички спортисти ще са в точка на пистата, която се намира на разстояние $2x$ от старта;

– при $\dfrac{1}{2}s < x \le s$, всички спортисти ще са в точка на пистата, която се намира на разстояние $2s - 2x$ от старта.

По същия начин, спортистите ще се намират в една и съща точка на пистата и след време $3t$ и т.н.