XXXI МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур, ОСНОВЕН вариант, 10. – 12. клас

(Резултатът се определя от трите най-добре решени задачи.)

Задача 1. (4 *точки*) Сто пирати играли на карти по двойки, като залагали златен пясък. След това всеки пресметнал общата си печалба или загуба. Всеки губещ има достатъчно златен пясък, за да се разплати. С едно действие се позволява пират да раздаде едно и също количество пясък на всички останали или пират да събере едно и също количество пясък от всички останали. Докажете, че с няколко такива действия може всеки победител да получи (общо) своята печалба и всеки губещ да изплати (общо) своята загуба. (Ясно е, че общият брой загуби е равен на общия брой победи.)

Задача 2. (6 *точки*) Правоъгълник, който не е квадрат, е разрязан на N правоъгълника, които не са задължително еднакви. Докажете, че всеки от тези правоъгълници може така да се разреже на две части и след това да се сглоби квадрат от N части и правоъгълник от останалите N части.

Задача 3. (7 *точки*) Сфера се допира до всички ръбове на тетраедър. За всеки два срещуположни (кръстосани) ръба е построена права през допирните им точки със сферата. Докажете, че трите построени прави се пресичат в една точка.

Задача 4. (9 *точки*) Нека $[n]!$ е произведението на n множители, записани с една, две, три и т.н. до n единици. Например, $[2]! = 1 \,.\, 11$, а $[5]! = 1 \,.\, 11 \,.\, 111 \,.\, 1111 \,.\, 11111$. Докажете, че $[n + m]!$ се дели на $[n]! \,.\, [m]!$

Задача 5. (9 *точки*) Дадени са триъгълник XYZ и изпъкнал шестоъгълник $ABCDEF$, като страните AB, CD и EF са успоредни и равни съответно на XY, YZ и ZX. Докажете, че лицето на триъгълника с върхове в средите на BC, DE и FA е не по-малко от лицето на триъгълника XYZ.

Задача 6. (12 *точки*) Ани и Боби заминават на пътешествие на архипелаг с 2009 острова. Някои от островите са свързани с двупосочна фериботна линия. По време на пътешествието, Ани и Боби играят следната игра. Ани избира първия остров, на който да кацне хеликоптера. Пътешествието продължава по вода, като Боби и Ани поред избират следващия (непосетен до момента) остров в маршрута (сега Боби е първи). Всеки два последователни острова в маршрута трябва да са свързани с фериботна линия. Който не може да избере следващ остров, губи. Докажете, че в тази игра Ани има печеливша стратегия.

Задача 7. (14 *точки*) На входа на пещера има въртяща се кръгла маса. На масата в кръг са сложени N еднакви затворени бъчви, като всяка е равноотдалечена от съседните си. Във всяка бъчва има една херинга, разположена или с главата нагоре, или с главата надолу. За един ход Али-Баба може да избере произволно множество бъчви (от една до N на брой) и да преобърне всички бъчви от това множество. След това вратата се завърта, а когато спре, Али-Баба не може да определи кои са преобърнатите бъчви. Пещерата ще се отвори, когато по време на завъртането главите на всичките N херинги са еднакво насочени (надолу или нагоре). При какви стойности на N Али-Баба може да отвори пещерата с няколко хода?