

XXXI МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур, ТРЕНИРОВЪЧЕН вариант, 10. – 12. клас

(Резултатът се определя от трите най-добре решени задачи.)

Задача 1. (4 точки) Седемцифрен код ще наричаме *хубав*, ако е съставен от седем различни цифри,. Паролата на един сейф е хубав код. Известно е, че сейфът се отваря, ако се въведе хубав код, някоя цифра на който съвпада със съответната поредна цифра на паролата. Има ли метод за отваряне на сейф с неизвестна парола с по-малко от 7 опита?

Задача 2. (4 точки) В пространството е дадена затворена начупена линия $ABCDEF$, като $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$. Отсечките AB и DE не са равни. Докажете, че начупената линия лежи в една равнина.

Задача 3. (4 точки) Съществуват ли такива естествени числа a , b , c и d , за които

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100} ?$$

Задача 4. (4 точки) На всяка от страните на правилен 2009-ъгълник е избрана по една точка. Тези точки са върхове на 2009-ъгълник с лице S . За всяка от избраните точки е отбелязана нейната симетрична точка относно средата на страната, на която лежи. Докажете, че 2009-ъгълникът с върхове симетричните точки също има лице S .

Задача 5. (5 точки) В една държава има две столици и няколко града, някои от които са свързани с пътища. Някои пътища са платени (трябва да се плати за преминаване по тях). Всеки маршрут от южната към северната столица включва не по-малко от 10 платени пътя. Докажете, че платените пътища могат да се разпределят между десет фирми така, че всеки маршрут от южната към северната столица да включва път на всяка от десетте фирми.