XXXI МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ
Есенен тур, ОСНОВЕН вариант, 7. – 9. клас

(Резултатът се определя от трите най-добре решени задачи.)

Задача 1. (4 *точки*) Във всеки от десет еднакви съда наляли мляко, което е не повече от 10% от вместимостта на съда. С едно действие се позволява да се избере съд и от него да се прелее поравно във всеки от останалите. Докажете, че количеството мляко във всеки от съдовете може да се изравни с не повече от 10 такива действия.

Задача 2. (6 *точки*) Мишо има 1000 еднакви кубчета. Стените на всяко кубче са оцветени така, че две срещуположни стени са червени, две срещуположни са сини и две са бели. Мишо сглобил куб 10 x 10 x 10, като долепял само еднакво оцветени стени на кубчетата. Докажете, че големият куб има едноцветна стена.

Задача 3. (6 *точки*) Намерете всички естествени числа a и b, за които $(a + b^2)(b + a^2)$ е от вида 2^n за някое естествено число n.

Задача 4. (6 *точки*) Даден е ромб $ABCD$. Точките P и Q лежат съответно на страните BC и CD, като $BP = CQ$. Докажете, че медицентърът на триъгълника APQ лежи на отсечката BD.

Задача 5. Дадено е множество теглилки от 1, 2, ..., N грама. Трябва да се изберат няколко от тях (повече от една) така, че общото тегло на избраните теглилки да е равно на средноаритметичното на останалите тегла. Докажете, че:

а) (2 *точки*) ако $N + 1$ е точен квадрат, задачата е изпълнима;

б) (7 *точки*) ако задачата е изпълнима, то $N + 1$ е точен квадрат.

Задача 6. (10 *точки*) На квадратна мрежа са поставени 2009 еднакви хартиени квадрати, чиито страни лежат на линиите на мрежата (квадратите могат да се припокриват). Маркирани са единичните квадратчета от мрежата, които са покрити от нечетен брой хартиени квадрати. Докажете, че са маркирани поне толкова квадратчета, колкото се съдържат в един хартиен квадрат.

Задача 7. (14 *точки*) Ани и Боби заминават на пътешествие на архипелаг с 2009 острова. Някои от островите са свързани с двупосочна фериботна линия. По време на пътешествието, Ани и Боби играят следната игра. Ани избира първия остров, на който да кацне хеликоптера. Пътешествието продължава по вода, като Боби и Ани поред избират следващия (непосетен до момента) остров в маршрута (сега Боби е първи). Всеки два последователни острова в маршрута трябва да са свързани с фериботна линия. Който не може да избере следващ остров, губи. Докажете, че в тази игра Ани има печеливша стратегия.