XXXI МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур, ОСНОВЕН вариант, 10. – 12. клас

Задача 1. (4 *точки*) Сто пирати играли на карти по двойки, като залагали златен пясък. След това всеки пресметнал общата си печалба или загуба. Всеки губещ има достатъчно златен пясък, за да се разплати. С едно действие се позволява пират да раздаде едно и също количество пясък на всички останали или пират да събере едно и също количество пясък от всички останали. Докажете, че с няколко такива действия може всеки победител да получи (общо) своята печалба и всеки губещ да изплати (общо) своята загуба. (Ясно е, че общият брой загуби е равен на общия брой победи.)

Решение. Общата печалба за означим с Z; общата загуба също е Z. Нека в началото златният пясък на всеки пират е в неговия десен джоб.
Да помолим всеки загубил да даде на всички (включително и на себе си) по 1% от своята загуба. Получения пясък всеки слага в левия си джоб. В резултат на това всеки пират ще има в в левия си джоб 1% Z златен пясък, а десният му джоб ще олекне с толкова, колкото е загубата му.
По-нататък, нека всеки спечелил получи от левия джоб на всички пирати (включително и от себе си) по 1% от своята печалба. Така левите джобове ще се изпразнят, а към пясъка в десния джоб на всеки победител ще се прибави неговата печалба.

Задача 2. (6 *точки*) Правоъгълник, който не е квадрат, е разрязан на N правоъгълника, които не са задължително еднакви. Докажете, че всеки от тези правоъгълници може така да се разреже на две части и след това да се сглоби квадрат от N части и правоъгълник от останалите N части.

Решение. Нека размерите на правоъгълника са $a \times b$, $a < b$ и страната b е хоризонтална. Да свием равномерно правоъгълника в хоризонтално направление така, че страните да се изравнят. Така ще получим квадрат, разрязан на правоъгълници. Всеки от тях е получен, като съответният му правоъгълник от първоначалното разбиване е свит хоризонтално ${}^{b}/_{a}$ пъти. Следователно правоъгълникът от разбиването на квадрата може да се получи чрез вертикално разрязване на съответния му правоъгълник от първоначалното разбиване.
Останалата част от първоначалния правоъгълник се получава при свиването му в хоризонтално направление ${}^{b}/_{(b-a)}$ пъти. Следователно с останалите след рязането части може да се сглоби правоъгълник, който се получава от дадения при свиване ${}^{b}/_{(b-a)}$ пъти.

Задача 3. (7 *точки*) Сфера се допира до всички ръбове на тетраедър. За всеки два срещуположни (кръстосани) ръба е построена права през допирните им точки със сферата. Докажете, че трите построени прави се пресичат в една точка.

Решение 1. Да разположим във всеки връх на тетраедъра маса, обратно пропорционална на дължината на допирателната от тази точка към сферата. Тогава центърът на тежестта на всеки ръб е допирната му точка със сферата. Следователно центърът на тежестта на тетраедъра лежи на отсечка, свързваща допирните точки на два кръстосани ръба със сферата. Следователно трите отсечки от условието се пресичат в центъра на тежестта на тетраедъра.

Решение 2. Нека K, L, M, N, P, R са допирните точки със сферата на ръбовете AB, AC, AD, BC, BD, CD на тетраедъра $ABCD$, a, b, c, d са дължините на допирателните от A, B, C, D съответно.

Пресечницата на равнините ABD и BCD е правата BD. От теоремата на Менелай за триъгълника ABD следва, че правата MK пресича BD в точка, която дели външно отсечката BD в отношение $\frac{AM}{DM}\cdot\frac{BK}{AK} = \frac{a}{d}\cdot\frac{b}{a} = \frac{b}{d}$. Аналогично правата RN пресича BD в същата точка: $\frac{CR}{DR}\cdot\frac{BN}{CN} = \frac{c}{d}\cdot\frac{b}{c} = \frac{b}{d}$. (Ако $b = d$, то MK и RN са успоредни на BD.) Следователно правите MK и RN лежат в една равнина и оттук правите MN и KR се пресичат.

Аналогично правата LP пресича MN и KR. Тъй като тези три прави не лежат в една равнина, то те се пресичат в една точка.

Задача 4. (9 *точки*) Нека $[n]!$ е произведението на n множители, записани с една, две, три и т.н. до n единици. Например, $[2]! = 1 \,.\, 11$, а $[5]! = 1 \,.\, 11 \,.\, 111 \,.\, 1111 \,.\, 11111$. Докажете, че $[n+m]!$ се дели на $[n]! \,.\, [m]!$

Решение. Да означим с 1_k числото, записано с k единици. Тогава $[m]! = 1_m[m-1]!$ и $1_{m+n} = 10^m 1_n + 1_m$. Да означим $C[m, n] = \frac{[n+m]!}{[m]![n]!}$ и да положим $[0]! = 1$; така $C[0, n]$ и $C[m, 0]$ са определени и са равни на 1.

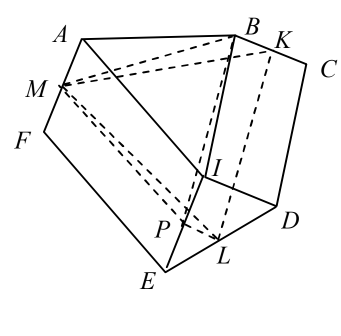
Ще докажем с индукция по $m + n$, че $C[m, n]$ е цяло число. Базата и случая $m = 0$ или $n = 0$ са очевидни.

Нека $m, n \geq 1$ и за по-малки стойности на $m + n$ твърдението е доказано. Тогава числото

$$C[m, n] = \frac{1_{m+n}[n+m-1]!}{[m]![n]!} = \frac{\left(1_n 10^m + 1_m\right)[n+m-1]!}{[m]![n]!} = 10^m \frac{1_n[n+m-1]!}{[m]!1_n[n-1]!} + \frac{1_m[n+m-1]!}{1_m[m-1]![n]!} =$$

$= 10^m C[m, n-1] + C[m-1, n]$ също е цяло.

Задача 5. (9 *точки*) Дадени са еднакво ориентирани триъгълник XYZ и изпъкнал шестоъгълник $ABCDEF$, като страните AB, CD и EF са успоредни и равни съответно на XY, YZ и ZX. Докажете, че лицето на триъгълника с върхове в средите на BC, DE и FA е не по-малко от лицето на триъгълника XYZ.



Решение. Да построим успоредника $BCDI$ (виж чертежа). По условие триъгълниците ABI и XYZ са еднакви. Следователно отсечката AI е успоредна и равна на на FE, т.е. $AIEF$ също е успоредник. Нека P е среда на EI; тогава $BKLP$ и $AIPM$ също са успоредници.

Ще използваме следното очевидно твърдение:
Нека $TUVW$ е успоредник и точка R и отсечката VW лежат от различни страни на правата TU. Тогава $S_{RVW} > S_{RTU}$.

От това твърдение (първо за успоредника $BKLP$, след това за $AIPM$.) получаваме, че $S_{KLM} > S_{MPB} > S_{ABI} = S_{XYZ}$..

Задача 6. (12 *точки*) Ани и Боби заминават на пътешествие на архипелаг с 2009 острова. Някои от островите са свързани с двупосочна фериботна линия. По време на пътешествието, Ани и Боби играят следната игра. Ани избира първия остров, на който да кацне хеликоптера. Пътешествието продължава по вода, като Боби и Ани поред избират следващия (непосетен до момента) остров в маршрута (сега Боби е първи). Всеки два последователни острова в маршрута трябва да са свързани с фериботна линия. Който не може да избере следващ остров, губи. Докажете, че в тази игра Ани има печеливша стратегия.

Решение. По картата Ани разглежда възможните начини за разделяне на островите по двойки, така че островите във всяка двойка да са свързани с фериботна линия и един остров да се включва в не повече от една двойка. От тези разделяния Ани избира това, което съдържа най-голям брой двойки. Островите, които не са включени в двойки, тя нарича *отделни.* Ясно е, че има поне един отделен остров.
Първо Ани избира отделен остров за кацане. По-нататък, ако Боби избере остров от някоя двойка, Ани избира втория остров от двойката.
Да допуснем, че Боби може да направи ход към отделен остров. Маршрутът от началото до този момент минава през $2k$ острова: $k-1$ двойки и два отделни острова. Но този маршрут може да се разбие на k двойки и те, заедно с непосетените двойки, ще дадат разделяне с по-голям общ брой двойки; противоречие. Следователно не е възможно Боби да направи ход на отделен остров и Ани побеждава.

Задача 7. (14 *точки*) На входа на пещера има въртяща се кръгла маса. На масата в кръг са сложени N еднакви затворени бъчви, като всяка е равноотдалечена от съседните си. Във всяка бъчва има една херинга, разположена или с главата нагоре, или с главата надолу. За един ход Али-Баба може да избере произволно множество бъчви (от една до N на брой) и да преобърне всички бъчви от това множество. След това вратата се завърта, а когато спре, Али-Баба не може да определи кои са преобърнатите бъчви. Пещерата ще се отвори, когато по време на завъртането главите на всичките N херинги са еднакво насочени (надолу или нагоре). При какви стойности на N Али-Баба може да отвори пещерата с няколко хода?

Решение. Да запишем единица на всяка бъчва, в която херингата е с главата надолу и нула на всяка бъчва, в която херингата е с главата нагоре.

Нека $N \neq 2^k$, $k = 0, 1, 2,...$Ще покажем, че Али-Баба не винаги ще може да отвори пещерата. Можем да предполагаме, че Али Баба преди всеки свой ход ни казва на кои места ще смени цифрите, а ние след това завъртаме кръга.

Да разгледаме първо случая, когато N е нечетно число. Нека на поредния си ход Али Баба е избира да смени цифрите на определени k места. Той ще спечели само ако тези k места съвпаднат или с множеството на всички нули, или с множеството на всички единици. Понеже N е нечетно число, то броят на нулите не е еравен на броя на единиците. Това означава, че някои от цифрите не са k на брой. Като завъртим масата така, че една от тези цифри да попадне в едно от избраните k места, след хода на Али-Баба ще има както единици така и нули.

Нека сега N е четно, но има нечетен зелител. Да изберем на масата m равноотдалечени места и да забравим за останалите. Прилагаме горната стратегия при което Али-Баба не може да направи равни всички цифри на избраните места.

Ще построим по индукция печеливш алгоритъм за 2^k места. За $k = 1$ печелившия алгоритъм е очевиден, трябва да се промени една от двете цифри. Нека имаме алгоритъм A_m за m места.. Ще построим алгоритъм A_{2m}. Да разбием кръга на m двойки срещуположни цифри и разглеждаме всяка двойка като една позиция.

1) Да допуснем, че във всяка двойка цифрите са равни. Можем да приложим алгоритъма A_m, като заместваме отделните места с цели двойки. Ясно е, че вратата ще се отвори.

2) Да допуснем, че сборовете на цифрите във всяка двойка имат една и съща четност. Прилагаме алгоритъма A_m за двойките. Ако вратата не се отвори, то всички сборове са били нечетни. Но при прилагане на A_m ние сменяме едновременно двете цифри във всяка двойка и следователно четността на техния сбор не се променя. Значи всички сборове са останали нечетни. Променияме m последователни цифри (да наречем тази операция D), след което всички сборове са четни. След прилагане на A_m за двойките ще отворим вратата. Да наречем алгоритъма в този случай B.

3) Ще променим алгоритъма A_m за двойките цифри с цел да направим сборовете във всички двойки с една и съща четност. На всяка стъпка избираме двойка съгласно алгоритъма A_m, но във всяка двойка променяме само една цифра. Това ни гарантира, че след някой ход четността на всички сборове ще е една и съща. Тъй като не знаем на кой ход ще стане това, след всеки ход прилагаме алгоритъм B, я след това D. Ако всички сборове са имали еднаква четност, алгоритъм B ще отвори вратата, а иначе BD няма да промени четността на тези сборове.