## XXXI МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

### Есенен тур, ТРЕНИРОВЪЧЕН вариант, 10. – 12. клас

**Задача 1.** (4 *точки*) Седемцифрен код ще наричаме *хубав*, ако е съставен от седем различни цифри,. Паролата на един сейф е хубав код. Известно е, че сейфът се отваря, ако се въведе хубав код, някоя цифра на който съвпада със съответната поредна цифра на паролата. Има ли метод за отваряне на сейф с неизвестна парола с по-малко от 7 опита?

**Решение**. Сейфът може да се отвори с 6 опита:

1234560, 2345610, 3456120, 4561230, 5612340, 6123450.

Измежду първите шест цифри на паролата има цифра от 1 до 6 (дори две, защото останалите цифри 7, 8, 9 и 0 са четири). В примера всяка цифра от 1 до 6 попада по веднъж на всяка от първите шест позиции, следователно ще има поне едно съвпадение и сейфът ще се отвори.

**Задача 2.** (4 *точки*) В пространството е дадена затворена начупена линия $ABCDEF$, като $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$. Отсечките $AB$ и $DE$ не са равни. Докажете, че начупената линия лежи в една равнина.

**Решение 1**. Равнините $AEF$ и $BCD$ са успоредни (тъй като $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$). Ако те не съвпадат, пресечните им точки с успоредните прави $AB$ и $DE$ ще са краища на равни отсечки $AB = DE$, противоречие. Следователно и шестте точки лежат в равнината $AEF$.

**Решение 2**. Векторът $\overline{AD}$ се изразява по два *различни* начина чрез векторите $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$:

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} \text{ и}$$

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{ED} + \overline{FE} + \overline{AF} = a\,\overline{AB} + b\,\overline{BC} + c\,\overline{CD},$$

където по условие $a \neq 1$. Следователно векторите $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ са компланарни.

**Задача 3.** (4 *точки*) Съществуват ли такива естествени числа $a$, $b$, $c$ и $d$, за които

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100} \ ?$$

**Решение**. Такива числа съществуват, например

$(100^{33})^3 + (2\cdot 100^{33})^3 + (3\cdot 100^{33})^3 + (4\cdot 100^{33})^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)\cdot 100^{99} = 100\cdot 100^{99} = 100^{100}$.

**Задача 4.** (4 *точки*) На всяка от страните на правилен 2009-ъгълник е избрана по една точка. Тези точки са върхове на 2009-ъгълник с лице $S$. За всяка от избраните точки е отбелязана нейната симетрична точка относно средата на страната, на която лежи. Докажете, че 2009-ъгълникът с върхове симетричните точки също има лице S.

**Решение**. Нека $A_1A_2\ldots A_{2009}$ е правилен 2009-ъгълник със страна 1 и ъгъл φ. Нека на страната $A_i A_{i+1}$ е отбелязана точка $P_i$ ; да означим $A_i P_i = a_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 2009$, $A_{2010} = A_1$). Страната $P_i P_{i+1}$ на многоъгълника $P_1P_2\ldots P_{2009}$ "отрязва" от правилния 2009-ъгълник триъгълник с връх $A_{i+1}$ с лице $0,5 \sin \varphi\cdot(1 - a_i)\, a_{i+1}$. Общото лице на отрязаните триъгълници е

$$R = 0,5 \sin \varphi\cdot((a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}) - (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{2009}a_1).$$

Ако $Q_i$ е симетричната точка на $P_i$ спрямо средата на страната $A_i A_{i+1}$, то $A_i Q_i = 1 - a_i$. Страната $Q_i Q_{i+1}$ на многоъгълника $Q_1Q_2\ldots Q_{2009}$ отрязва от правилния 2009-ъгълник триъгълник с връх $A_i$ с лице $0,5 \sin \varphi\cdot a_i\,(1 - a_{i+1})$. Общото лице на отрязаните триъгълници отново е равно на $R$.

Следователно лицата на многоъгълниците $P_1P_2\ldots P_{2009}$ и $Q_1Q_2\ldots Q_{2009}$ са равни.

**Задача 5.** (5 *точки*) В една държава има две столици и няколко града, някои от които са свързани с пътища. Някои пътища са платени (трябва да се плати за преминаване по тях). Всеки маршрут от южната към северната столица включва не по-малко от 10 платени пътя. Докажете, че платените пътища могат да се разпределят между десет фирми така, че всеки маршрут от южната към северната столица да включва път на всяка от десетте фирми.

**Решение**. На всеки маршрут от южната столица Ю към северната С да отбележим първия платен път с числото 1. Ще докажем, че всеки маршрут *p* от Ю към С включва поне 9 платени неотбелязани пътя.

Нека *d* е най-близкият до С отбелязан път от маршрут *p.* За да е отбелязан, път *d* е първи платен път от даден маршрут *q* от Ю към С. Да тръгнем от Ю, следвайки маршрут *q*, по безплатни пътища до *d*, а след *d* да продължим по маршрут *p* до С. Единственият отбелязан път в избрания от нас маршрут е *d*, а по условие всеки маршрут от Ю до С минава през най-малко 10 платени пътя. Следователно частта от маршрут *p* от *d* до С минава през поне 9 неотбелязани платени пътя.

Времмно да обявим отбелязаните платени пътища за безплатни и на всеки маршрут от Ю към С да отбележим с 2 първия платен път. По същия начин получаваме, че на всеки маршрут остават не по-малко от 8 неотбелязани платени пътя.

Аналогично отбелязваме платени пътища с номер 3, 4 , ..., 10 на всеки паршрут. В съответствие с номерата, раздаваме пътищата на фирмите, като останалите платени пътища раздпределяме по произволен начин.