XXXI МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ
Есенен тур, ОСНОВЕН вариант, 7. – 9. клас

Задача 1. (4 *точки*) Във всеки от десет еднакви съда наляли мляко, което е не повече от 10% от вместимостта на съда. С едно действие се позволява да се избере съд и от него да се прелее поравно във всеки от останалите. Докажете, че количеството мляко във всеки от съдовете може да се изравни с не повече от 10 такива действия.

Решение. Да прелеем от всеки съд във всички останали по 10% от *първоначалното* количество мляко в този съд. Така млякото от всеки съд ще се разпредели поравнов съдовете, следователно във всеки съд ще има едно и също количество мляко.

Задача 2. (6 *точки*) Мишо има 1000 еднакви кубчета. Стените на всяко кубче са оцветени така, че две срещуположни стени са червени, две срещуположни са сини и две са бели. Мишо сглобил куб 10 х 10 х 10, като долепял само еднакво оцветени стени на кубчетата. Докажете, че големият куб има едноцветна стена.

Решение. Нека лявата стена на куба не е едноцветна. Да изберем на нея две съседни разноцветни квадратчета, например синьо и бяло. Да завъртим куба така, че съответните им кубчета да застанат едно над друго. Тези кубчета образуват параллелепипед П ($1\times1\times2$) със синьо-бяла лява стена. Следователно общата хоризонтална стена на двете кубчета е червена и всичи вертикални 1×2 стени на П са синьо-бели.
Да разгледаме паралелепипед П’ ($1\times1\times2$), който се допира до П по стена 1×2. Той също има синьо-бяла стена, следователно всичките му вертикални стени са синьо-бели. Продължавайки по същия начин, получаваме, че П определя двоен хоризонтален слой $10\times10\times2$, в който всички верикални $1\times1\times2$ паралелепипеди имат синьо-бяла стена. Следователно в този двоен слой единичните слоеве $10\times10\times1$ се допират по червена стена 10×10 и оттук горната стена на сглобения куб е червена.

Задача 3. (6 *точки*) Намерете всички естествени числа a и b, за които $(a + b^2)(b + a^2)$ е от вида 2^n за някое естествено число n.

Решение. Първо ще отбележим, че $a + b^2$ и $b + a^2$ са степени на двойката, а числата a и b са с еднаква четност. Ще разгледаме два случая:

1) $a = b$. Тогава $a^2 + a = a(a + 1)$ е степен на двойката. Числата a и $a + 1$ са с различна четност и са степени на двойката, следователно $a = 1$.

2) $a > b$. Тогава $a^2 + b = 2^m > b^2 + a = 2^n$. Имаме
$$(2^{m-n} - 1)\cdot 2^n = a^2 - b^2 + b - a = (a - b)(a + b - 1).$$
Числото $a - b$ е четно, а числото $a + b - 1$ е нечетно, следователно $a - b = 2^n = a + b^2$. Противоречие.
Така решението на задачата е $a = b = 1$.

Задача 4. (6 *точки*) Даден е ромб $ABCD$. Точките P и Q лежат съответно на страните BC и CD, като $BP = CQ$. Докажете, че медицентърът на триъгълника APQ лежи на отсечката BD.

Решение. Да означим векторите $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тогава $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{b}$, а $\overrightarrow{BP} = k\vec{b}$ и $\overrightarrow{CQ} = k\vec{a}$. За медицентъра G на триъгълника APQ имаме

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BQ}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + k\vec{b} + \left(\vec{b} + k\vec{a}\right)\right) = \frac{k+1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{k+1}{3}\overrightarrow{BD}.$$

Следователно G лежи на BD.

Задача 5. Дадено е множество теглилки от 1, 2, ..., N грама. Трябва да се изберат няколко от тях (повече от една) така, че общото тегло на избраните теглилки да е равно на средноаритметичното на останалите тегла. Докажете, че:

а) (2 *точки*) ако $N + 1$ е точен квадрат, задачата е изпълнима;

б) (7 *точки*) ако задачата е изпълнима, то $N + 1$ е точен квадрат.

Решение. **а**) Нека $N + 1 = k^2$. Общото тегло на теглилките 1, 2,..., k е равно на $\frac{k^2+k}{2}$. Средноаритметичното на останалите последователни естествени числа е равно на полусбора на крайните, т.е. на $\frac{k+1+k^2-1}{2} = \frac{k^2+k}{2}$.

б) Общото тегло на теглилките е $\frac{N^2+N}{2}$. Нека са избрани k теглилки с общо тегло S така, че средното тегло на останалите $N-k$ теглилки да е равно на S. Това означава, че

$$\frac{N^2+N}{2} - S = (N-k)\,S, \text{ т.е. } \quad 2S\,(N-k+1) = N^2 + N.$$

Тъй като $N^2 + N > N^2 + N - k^2 + k = (N+k)(N-k+1)$, от горното равенство следва, че

$$2S > N + k.$$

От друга страна, ако изберем *най-леките* k теглилки, то средното тегло на останалите ще е *най-голямо* и ще е равно на $\frac{N+k+1}{2}$. Следователно при всеки избор имаме

$$2S \leq N + k + 1.$$

От получените неравенства следва, че $2S = N + k + 1$, т.е. са избрани най-леките k теглилки и оттук $N + 1 = k^2$.

Задача 6. (10 *точки*) На квадратна мрежа са поставени 2009 еднакви хартиени квадрати, чиито страни лежат на линиите на мрежата (квадратите могат да се припокриват). Маркирани са единичните квадратчета от мрежата, които са покрити от нечетен брой хартиени квадрати. Докажете, че са маркирани поне толкова квадратчета, колкото се съдържат в един хартиен квадрат.

Решение (Радослав Комитов, Ямбол). Нека хартиените квадрати са със страна n. Да изберем квадрат n x n в мрежата и да оцветим всяко квадратче в различен цвят. Полученото оцветяване в n^2 цвята транслираме във вертикално и хоризонтално направление и така оцветяваме квадратната мрежа.

При това оцветяване всеки хартиен квадрат покрива по едно квадратче от всеки от използваните n^2 цвята.

Кратност на квадратче от мрежата ще наричаме броя на хартиените квадрати, които го покриват. Маркираните квадрачета от условието са тези с нечетна кратност.

Да разгледаме произволен цвят w от оцветяването. Сборът на кратностите на квадратчетата от мрежата, оцветени в цвят w, е 2009. Следователно поне едно квадратче с цвят w има нечетна кратност, т.е. е маркирано.

Така получаваме поне по едно маркирано квадратче от всеки цвят, т.е. поне n^2 маркирани квадратчета.

Задача 7. (14 *точки*) Ани и Боби заминават на пътешествие на архипелаг с 2009 острова. Някои от островите са свързани с двупосочна фериботна линия. По време на пътешествието, Ани и Боби играят следната игра. Ани избира първия остров, на който да кацне хеликоптера. Пътешествието продължава по вода, като Боби и Ани поред избират следващия (непосетен до момента) остров в маршрута (сега Боби е първи). Всеки два последователни острова в маршрута трябва да са свързани с фериботна линия. Който не може да избере следващ остров, губи. Докажете, че в тази игра Ани има печеливша стратегия.

Решение. По картата Ани разглежда възможните начини за разделяне на островите по двойки, така че островите във всяка двойка да са свързани с фериботна линия и един остров да се включва в не повече от една двойка. От тези разделяния Ани избира това, което съдържа най-голям брой двойки. Островите, които не са включени в двойки, тя нарича *отделни.* Ясно е, че има поне един отделен остров.

Първо Ани избира отделен остров за кацане. По-нататък, ако Боби избере остров от някоя двойка, Ани избира втория остров от двойката.

Да допуснем, че Боби може да направи ход към отделен остров. Маршрутът от началото до този момент минава през $2k$ острова: $k-1$ двойки и два отделни острова. Но този маршрут може да се разбие на k двойки и те, заедно с непосетените двойки, ще дадат разделяне с по-голям общ брой двойки; противоречие. Следователно не е възможно Боби да направи ход на отделен остров и Ани побеждава.