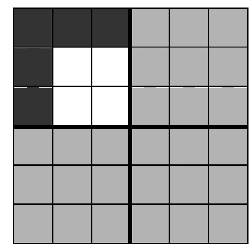
XXXI МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Есенен тур, ТРЕНИРОВЪЧЕН вариант, 7. – 9. клас

Задача 1. (3 *точки*) Може ли квадрат да се разреже на 9 квадрата и те да се оцветят така, че да има един бял, три сиви и пет черни квадрата, като при това едноцветните квадрати са еднакви, а всеки два разноцветни квадрата имат различни страни?

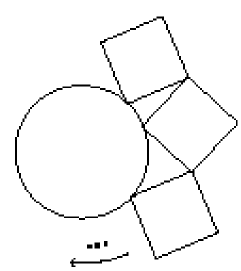


Решение. Такова разрязване е показано на рисунката. Квадрат 6×6 е разрязан на четири квадрата 3×3, три от тях са оцветени в сиво, а от четвъртия е изрязан бял квадрат 2×2. Останалите пет единични квадрата са оцветени в черно..

Задача 2. (4 *точки*) Дадени са 40 теглилки: 1 g, 2 g, ... , 40 g. Десет теглилки с четна маса са сложени на лявото блюдо на везна и след това десет теглилки с нечетна маса са сложени на дясното блюдо на везната. Ако двете блюда на везната се уравновесяват, докажете, че в някое блюдо има две теглилки, чиито маси се различават с точно 20 g.

Решение.Да разделим теглилките на двойки с разлика 20: (1, 21), (2, 22), ..., (20, 40). В Теглилките с нечетна маса са в десет двойки, както и теглилките с четна маса.
Ако на везната има две теглилки от една и съща двойка, твърдението е доказано. В обратен случай на везната има точно по една теглика от всяка двойка. Тогава, независимо от избора на теглилките във всяка двойка, общата маса на нечетните теглилки при деление на 20 дава остатък $1 + 3 + ... + 19 = 100$ (т.е. 0) , а общата маса на четните теглилки при деление на 20 дава остатък $2 + 4 + ... + 20 = 110$ (т.е. 10). Това е противоречие, тъй като по условие четните и нечетните теглилки се уравновесяват.

Задача 3. (4 *точки*) На маса е поставен картонен кръг с радиус 5 см. Докато е възможно, Петър поставя картонени квадрати със страна 5 см извън кръга така, че да са в изпълнени условията:



1) един връх на всеки квадрат лежи на границата на кръга;
2) квадратите не се припокриват;
3) всеки нов квадрат има общ връх с поставения преди него.

Намерете броя на квадратите, които може да постави Петър и докажете, че първият и последният от тях също имат общ връх.

Решение. Да означим центъра на кръга с O. Ако връх A на квадрата $ABCD$ лежи на дадената окръжност, то точките B, D и O лежат на окръжност с радиус 5 см и център A. Вписаният ъгъл $\angle BOD = ½\ \angle BAD = 45°$. Следователно всеки от поставените квадрати се вижда от центъра на кръга под ъгъл 45°. Тъй като квадратите не се припокриват и

всеки има общ връх с поставения преди него, Петър може да постави $360°/45° = 8$ квадрата.
Да означим квадрата, "закачен" за връх D, с $EDFG$ (точка E лежи на окръжността). В ромба $OADE$ имаме $\angle OAD = \angle OED$. Оттук

$$\angle OAB = 360° – 90° – \angle OAD = 360° – 90° – \angle OED = \angle OEG.$$

Триъгълниците OAB и OEG са еднакви по 1. признак, следователно $OB = OG$.
Получихме, че в два квадрата с общ връх срещуположните му върхове са равноотдалечени от O. Следователно един от върховете на първия квадрат и един от върховете на осмия лежат на един и същ лъч с начало O и са равноотдалечени от O, т.е. те съвпадат.

Задача 4. (5 *точки*) Седемцифрен код ще наричаме *хубав*, ако е съставен от седем различни цифри,. Паролата на един сейф е хубав код. Известно е, че сейфът се отваря, ако се въведе хубав код, някоя цифра на който съвпада със съответната поредна цифра на паролата. Има ли метод за отваряне на сейф с неизвестна парола с по-малко от 7 опита?

Решение. Сейфът може да се отвори с 6 опита:

1234560, 2345610, 3456120, 4561230, 5612340, 6123450.

Измежду първите шест цифри на паролата има цифра от 1 до 6 (дори две, защото останалите цифри 7, 8, 9 и 0 са четири). В примера всяка цифра от 1 до 6 попада по веднъж на всяка от първите шест позиции, следователно ще има поне едно съвпадение и сейфът ще се отвори.

Задача 5. (5 *точки*) На нов сайт се регистрирали 2000 потребители. Всеки от тях поканил 1000 (от регистрираните на сайта) да станат приятели. Двама стават приятели, само ако всеки от тях е поканил другия. Най-малко колко приятелски двойки има на сайта?

Решение. Поканите са общо $2000 \,.\, 1000 = 2000000$, а двойките потребители на сайта са $2000 \cdot 1999 / 2 = 1999000$. Броят на поканите е с 1000 повече от броя на двойките, следователно има поне 1000 двойки, в които са разменени покани и се е завързало приятелство.
Точно 1000 приятелски двойки се получават, ако разположим всички потребители в кръг и всеки покани следващите 1000 след себе си (по посока на часовниковата стрелка). Така ще се образуват приятелски двойки само между тези потребители, които са разположени диаметрално противоположно.