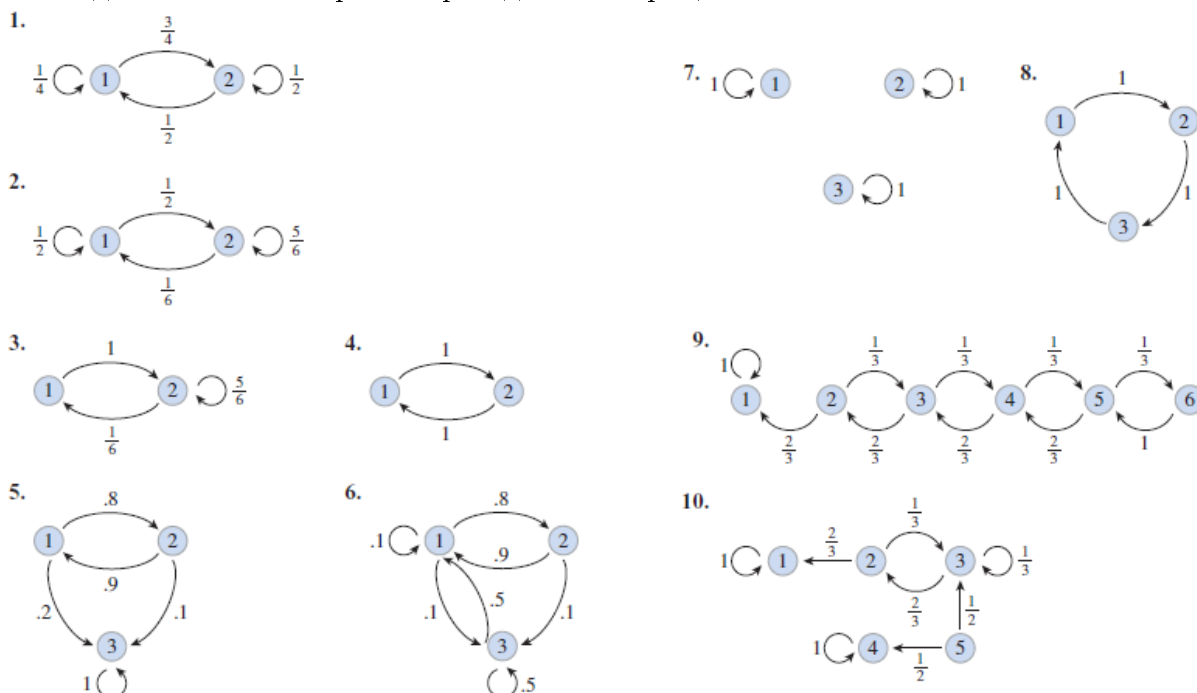


Задачи за марковски вериги

В задачите 1–10 постройте преходната матрица за всяка от схемите.



В задачите 11–24 е дадена преходната матрица и вектора на началното разпределение v . Намерете: (а) преходната матрица за 2 стъпки; (б) вектора на разпределението след една, 2 и 3 стъпки.

$$11. P = \begin{bmatrix} .5 & .5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, v = [1 \ 0]$$

$$12. P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ .5 & .5 \end{bmatrix}, v = [0 \ 1]$$

$$13. P = \begin{bmatrix} .2 & .8 \\ .4 & .6 \end{bmatrix}, v = [.5 \ .5]$$

$$14. P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, v = [1/4 \ 3/4]$$

$$15. P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, v = [2/3 \ 1/3]$$

$$16. P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}, v = [1/5 \ 4/5]$$

$$17. P = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}, v = [1/2 \ 1/2]$$

$$18. P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}, v = [1/7 \ 6/7]$$

$$19. P = \begin{bmatrix} .5 & .5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & .5 & .5 \end{bmatrix}, v = [1 \ 0 \ 0]$$

$$20. P = \begin{bmatrix} .5 & 0 & .5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & .5 \end{bmatrix}, v = [0 \ 1 \ 0]$$

$$21. P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, v = [1/2 \ 0 \ 1/2]$$

$$22. P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, v = [0 \ 0 \ 1]$$

$$23. P = \begin{bmatrix} .1 & .9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & .2 & .8 \end{bmatrix}, v = [.5 \ 0 \ .5]$$

$$24. P = \begin{bmatrix} .1 & .1 & .8 \\ .5 & 0 & .5 \\ .5 & 0 & .5 \end{bmatrix}, v = [0 \ 1 \ 0]$$

В задачите 25–36 е дадена преходната матрица. Намерете стационарното разпределение.

$$25. \nabla P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$26. \nabla P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$27. \nabla P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$28. \nabla P = \begin{bmatrix} .2 & .8 \\ .4 & .6 \end{bmatrix}$$

$$29. \nabla P = \begin{bmatrix} .1 & .9 \\ .6 & .4 \end{bmatrix}$$

$$30. \nabla P = \begin{bmatrix} .2 & .8 \\ .7 & .3 \end{bmatrix}$$

$$31. \nabla P = \begin{bmatrix} .5 & 0 & .5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & .5 \end{bmatrix}$$

$$32. \nabla P = \begin{bmatrix} 0 & .5 & .5 \\ .5 & .5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$33. \nabla P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$34. \nabla P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$35. \nabla P = \begin{bmatrix} .1 & .9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & .2 & .8 \end{bmatrix}$$

$$36. \nabla P = \begin{bmatrix} .1 & .1 & .8 \\ .5 & 0 & .5 \\ .5 & 0 & .5 \end{bmatrix}$$

(Задачите 1-36 са от: Stefan Waner, Steven R. Costenoble, Finite Mathematics, Fifth Edition, 2011.) стр.531

37 „Зеленчукови пазари”. В един град потребителите могат да пазаруват в три основни зеленчукови пазара: H-Mart, Freddy's и Shopper's Market. Всяка година H-Mart запазва 80% от своите потребители и губи 5%, които отиват в Freddy's и 15%, които отиват в Shopper's Market. Freddy's запазва 65% от своите потребители, губи 20%, които отиват в H-Mart и 15% to, които отиват в Shopper's Market. Shopper's Market запазва 70% от своите потребители, губи 20%, които отиват в H-Mart и 10%, които отиват в Freddy's. По настоящем нека приемем, че H-Mart държи 1/2 от пазара, а Shopper's Market и Freddy's имат по 1/4 от пазара всеки.

- Начертайте схемата на преходите.
- Постройте преходната матрица и запишете началния вектор.
- Използвайте преходната матрица и началния вектор, за да попълните таблицата за разпределението на пазара през следващите 10 години. (Използвайте 4 десетични знака след запетаята, ако е необходимо.)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H-Mart										
Shopper's										
Freddy's										

- Пресметнете T^n за достатъчно голямо n , за да определите устойчивия вектор с 4 десетични знака. Запишете T^* и n , които сте получили.
- Какво забелязвате за стълбовете на T и за устойчивия вектор?
- Вземете 2 други начални вектора (Внимавайте сумата на числата да е 1). Определете устойчивия вектор по същия начин както преди. Запишете резултатите.

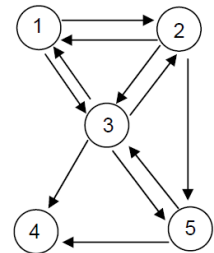
- i) $q = \begin{pmatrix} & & & & \end{pmatrix}$, устойчив вектор $= \begin{pmatrix} & & & & \end{pmatrix}$, Степен на матрицата:
- ii) $q = \begin{pmatrix} & & & & \end{pmatrix}$, устойчив вектор $= \begin{pmatrix} & & & & \end{pmatrix}$, Степен на матрицата:

38 „Уеб страници“. На схемата е представена мрежа от 5 страници:

a) Постройте преходната матрица.

b) Постройте „Google матрица“ $\bar{T}$, ако е необходимо да елиминирате страници без изход.

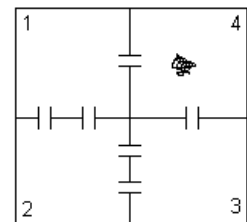
Използвайте $\bar{\bar{T}} = \alpha \bar{T} + (1 - \alpha)E$, където всички числа в матрицата E са $=1/5$ и $\alpha = 0.9$.



(Задачи 37-38 са от: Rebecca Atherton, A Look at Markov Chains and Their Use in Google.)

39 „Лабиринт за мишки“.

Една мишка е поставена в лабиринт, състоящ се от 4 квадрата. Горния ляв квадрат е стая номер 1, долния ляв – стая номер 2, долния десен – стая номер 3 и горния десен – стая номер 4. Има един път между стая 1 и стая 4, два пътя между стая 1 и стая 2, 2 пътя между стая 2 и стая 3, и един път между стая 3 и стая 4. В стая 4 на лабиринта има храна.



Лабиринта е построен така, че миризмата на храна достига до всички стаи. Предполагаме, че мишката се движи случайно през лабиринта докато намери храната. Ако мишката се намира в някоя от стаите, то очакваме тя да избере случайно един от възможните изходи и да премине към друга стая. Така например, ако мишката е била в стая 1, очакваме с вероятност $1/3$ тя да премине към стая 4, тъй като има 3 изхода от стая 1 и един от тях води към стая 4. Вероятността да премине от стая 1 към стая 3 е нула, тъй като няма път от стая 1 към стая 3.

a) Начертайте схемата на движение из лабиринта. Очертайте „ухо“ с вероятност 1, факта че мишката остава в стая 4, след като намери храната там. (Различаваме действието на мишката, когато преминава от една стая в друга и когато намери храната.)

b) По тази схема постройте преходната матрица T за преминаване от една стая в друга. Числото в ред 1 стълб 4 трябва да е вероятността мишката да премине от стая 1 в стая 4, която е $1/3$.

c) Използвайте матрицата, за да определите вероятността мишката да премине от стая 2 в стая 4 за един и за два хода. За да направите това, запишете началното състояние като $[0 \ 1 \ 0 \ 0]$, което означава, че мишката тръгва от стая 2. Умножете S по T , за да определите вероятностите мишката да е в различните състояния (стаи) след първия ход. Умножете отново с T , за да получите необходимия отговор за два хода.

d) Каква е вероятността след като мишката е поставена в стая 2 и е направила 2, 3, 4 или 8 хода, отново да се намира в стая 2?

е) Средно колко често мишката ще е била във всяка стая преди да достигне храната. Разгледайте случаите, когато тя е поставена в стая 2, 1 или 3.

40 „Хвърляне на топка“. Две деца хвърлят топка. Всяко дете може да подаде топката на другото или да я хвърли нагоре, за да я улови само. Вероятността топката да е в ръцете на детето A или B зависи от това в кого е била преди това.

а) Измислете (или проведете) такъв експеримент за играта на 2 деца. След 50 хвърляния, запишете броя на следните събития:

A към A

A към B

B към B

B към A (Например 12, 19, 10, 9).

Пребройте хвърлянията на A и B и пресметнете вероятността:

$$P(AA) = (\text{броя } A \text{ към } A) / (\text{хвърлянията на } A).$$

Аналогично пресметнете $P(AB)$, $P(BB)$ и $P(BA)$.

б) Постройте вероятностно дърво, съответно на 3 хвърляния. Да предположим, че хвърлянето започне от A . Каква е вероятността след третото хвърляне, топката пак да е в A . Постройте второ вероятностно дърво, при предположение, че топката първоначално е в B . Пресметнете каква е вероятността след третото хвърляне, топката да е в A .

с) Постройте схема на преходите. Върху всяка стрелка означете вероятностите.

д) Представете вероятностите чрез преходна матрица T . На позицията A към A запишете вероятността A да хвърли топката към себе си. На позиция A към B – вероятността A да хвърли топката към B и т.н. (сумата на числа по редове трябва да е 1.)

Нека топката е в ръцете на първото дете, A . Това може да се изрази с началния вектор $[1 \ 0]$. Умножете S по T , за да получите вероятностите за позицията на топката след първото хвърляне. Умножете резултата още 2 пъти с T . Резултатът трябва да съвпада с този от вероятностното дърво след 3 хвърляния.

е) Продължете да умножавате с T , докато достигнете устойчив вектор. Какво показва той? Каква ще е евентуалната позиция на топката след много хвърляния?

ф) Да предположим, че началното разпределение от (а) е различно. Коригирайте матрицата T по подходящ начин и повторете умножението от (д) и (е). Обяснете резултата.

g) Забравете за вектора S и умножавайте матрицата T на себе си няколко пъти (примерно 20 пъти). Какво се наблюдава? Има ли значение разпределението S ? При коя стойност на n матрицата се стабилизира?

41 „Поглъщаща марковска верига”. Неуверен комарджия играе на рулетка с \$20 по следната схема: На всяко завъртане на рулетката залага \$10 на червено. Ако излезе червено, той печели \$10, а ако е черно губи \$10. За простота нека приемем, че вероятността червено е точно $1/2$. (В действителност е малко по-малка.) Човекът играе докато спечели \$50 или докато загуби всичките си пари. Тогава играта свършва и той си тръгна.

- a) Пресметнете вероятността да спечели за 3, 5 или 10 хода.
- b) Пресметнете вероятността да загуби всичките си пари до 10 хода.
- b) Симулирайте играта 20 пъти. Пресметнете средното време до печалба и средното време до загуба.

Моделирайте ситуацията с марковска верига.

- a) Начертайте схемата на преходите и постройте преходната матрица
- b) Какво е дългосрочното поведение на марковската верига?

В задачите 41–50 определете PageRank на страниците от мрежите, зададени с хипервръзките. Постройте „Google матрица”, ако е необходимо да коригирате страници без изход.

41. Мрежа се състои от 3 web страници: A, B, C, със следните хипервръзки:

$$A \rightarrow B, C$$

$$B \rightarrow A$$

$$C \rightarrow B.$$

42. Мрежа се състои от 3 web страници: A, B, C, със следните хипервръзки:

$$A \rightarrow B, C$$

$$B \rightarrow C$$

$$C \rightarrow A.$$

43. Мрежа се състои от 3 web страници: A, B, C, със следните хипервръзки:

$$A \rightarrow B, C$$

$$B \rightarrow C.$$

44. Мрежа се състои от 4 web страници: A, B, C, D, със следните хипервръзки:

$$A \rightarrow C$$

$$B \rightarrow A$$

$$C \rightarrow A, B, D, D$$

$$D \rightarrow A, C$$

45. Мрежа се състои от 4 web страници: A, B, C, D, със следните хипервръзки

$$\begin{aligned}
A &\rightarrow C, D \\
B &\rightarrow A, A, D, D \\
C &\rightarrow A, B, D, D \\
D &\rightarrow C
\end{aligned}$$

46. Мрежа се състои от 4 web страници: A, B, C, D, със следните хипервръзки

$$\begin{aligned}
A &\rightarrow B \\
B &\rightarrow A, C \\
C &\rightarrow B, D
\end{aligned}$$

47. Мрежа се състои от 5 web страници: A, B, C, D, E, със следните хипервръзки

$$\begin{aligned}
A &\rightarrow B \\
B &\rightarrow A, C \\
C &\rightarrow B, D \\
D &\rightarrow C, E \\
E &\rightarrow A, C, D
\end{aligned}$$

48. Мрежа се състои от 6 web страници: A, B, C, D, E, F, със следните хипервръзки

$$\begin{aligned}
B &\rightarrow A, F \\
C &\rightarrow B, D, F \\
E &\rightarrow B, C, D, D \\
F &\rightarrow C, D.
\end{aligned}$$

49. Мрежа се състои от 7 web страници: A, B, C, D, E, F, G, със следните хипервръзки

$$\begin{aligned}
A &\rightarrow C, D, E, F & D &\rightarrow B. \\
B &\rightarrow A, D & E &\rightarrow B, F, G \\
C &\rightarrow E, F, F & G &\rightarrow B, D, D, D.
\end{aligned}$$

50. Мрежа се състои от 10 web страници: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, със следните хипервръзки

$$\begin{aligned}
A &\rightarrow C, H, I, I, J & F &\rightarrow C, D, D, G, H \\
B &\rightarrow A, D, D, E & G &\rightarrow C, C, D, D \\
C &\rightarrow B, D, D, D & H &\rightarrow B, D, D \\
D &\rightarrow A, J & I &\rightarrow B, C, E, F \\
E &\rightarrow A, B, D & J &\rightarrow A, B, D, D.
\end{aligned}$$