Доклады Академии наук БССР

1985 XXIX № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51:517.53/57

О. И. КУНЧЕВ

О ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩЕЙСЯ ОТ ЗАДАННОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ В КРУГЕ

(Представлено академиком АН БССР В. И. Крыловым)

В настоящей статье решен вопрос о характеризации гармонической функции, наименее уклоняющейся от заданной непрерывной в единичном круге.

Обозначим через H совокупность всех гармонических в единичном круге $B=\{x\in\mathbf{R}^2;\ \|x\|\leqslant 1\}$ функций $\Phi(x)$, которые непрерывны в нем [1].

Будем рассматривать аппроксимацию непрерывной функции $f(x)$, заданной на B, при помощи элементов из H в чебышевской норме

$$\max_{x\in B}|\Phi(x)-f(x)|=\|\Phi-f\|. \tag{1}$$

В силу компактности H (см. [1]) элемент наилучшего приближения существует для любой непрерывной функции $f(x)$.

При заданном $\Phi\in H$ определим следующие критические множества:

$$\begin{gathered}T_+=\{x\in B;\ \Phi(x)-f(x)=\|\Phi-f\|\},\\ T_-=\{x\in B;\ -\Phi(x)+f(x)=\|\Phi-f\|\},\\ T=T_+\cup T_-.\end{gathered} \tag{2}$$

Очевидно, $T_+\neq\varnothing$ и $T_-\neq\varnothing$ в силу того, что $\Phi(x)+C\in H$ для любой константы C.

Гармоническую функцию наилучшего приближения характеризует следующая

Теорема. *Функция $\Phi\in H$ является наилучшим приближением в метрике (1) для непрерывной в B функции f тогда и только тогда, когда соответствующее множество T содержит множество Γ, являющееся границей односвязной области в B, кратко говоря, «замкнутую кривую», а также точку x_0, причем если $\Gamma\subset T_+$, то $x_0\in T_-$, и, наоборот, из $\Gamma\subset T_-$ следует $x_0\in T_+$.*

Замечание. В ходе доказательства будет видно, что на самом деле $\Gamma\subset\partial T$.

Для доказательства теоремы нуждаемся в следующих известных утверждениях:

Лемма 1 ([2]). *Пусть A — подпространство пространства непрерывных функций на компакте K, $C(K)$. Для того чтобы функция $\Phi\in A$ была элементом наилучшего приближения для f, необходимо и достаточно, чтобы на подмножествах T_+, T_- нашлись регулярные, борелевские неотрицательные меры ν_+ и ν_- такие, что $\mathrm{Var}\nu_++\mathrm{Var}\nu_-=1$, а мера $\mu=\nu_+-\nu_-$ удовлетворяла соотношению*

$$\int_T \Phi d\mu=0,\quad \forall\Phi\in A. \tag{3}$$

Пусть задан компакт K. Обозначим через H_K линейное подпространство $C(K)$, состоящее из всех функций, гармонических в $\overset{0}{K}$.

Лемма 2 ([3]). *Какова бы ни была мера* ν *с носителем* $\operatorname{supp}(\nu)\subset K$, *можно ей сопоставить меру* ν', $\operatorname{supp}(\nu')\subset\partial K$, *таким образом, что для любой гармонической функции* $h\in H_K$

$$\int\limits_{\partial K} h d\nu' = \int\limits_{K} h d\nu, \tag{4}$$

если мера ν *положительна, то и мера* ν' *положительна.*

Лемма 3 ([4]). *Если* K — *компактное множество в комплексной плоскости со связным дополнением и функция* $f(z)$ *непрерывна на* K *и гармоническая во внутренних точках* K, *то* $f(z)$ *может быть равномерно приближена на* K *с любой точностью гармоническими полиномами по* $z=(x_1, x_2)$.

Доказательство необходимости теоремы. Если $\|\Phi - f\|=0$, то нечего доказывать. Поэтому допустим, что $\|\Phi - f\|>0$. Это означает, что множество T отлично от B, а также и $T_+\cap T_-=\varnothing$.

По лемме 1 существует мера μ, для которой выполняется равенство (3) при любом $\Phi\in H$.

Согласно лемме 2, существует мера μ', сосредоточенная на границе множества T, для которой выполнено равенство (4). Вместе с равенством (3) получаем следующее равенство:

$$\int\limits_{\partial T} \Phi(x)\, d\mu'(x) = \int\limits_{T} \Phi(x)\, d\mu(x) = 0, \ \forall\, \Phi\in H. \tag{5}$$

Равенство (5) означает, что совокупность функций на ∂T, являющихся ограничениями функций из H, не плотна в множестве $C(\partial T)$ всех непрерывных функций, заданных на ∂T. Но, согласно лемме 3, если дополнение множества ∂T в $\mathbf{R}^2$ связно, то совокупность всех гармонических полиномов плотна в $C(\partial T)$. Следовательно, дополнение $\mathbf{R}^2\backslash\partial T$ не связно.

Рассмотрим некоторую из компонент множества $\mathbf{R}^2\backslash\partial T$, не содержащую бесконечно удаленную точку. Обозначим ее через K. Определим односвязную оболочку K:

$$\{K\} = \{x\in\mathbf{R}^2;\ x\in\psi(B),\ \partial\psi(B)\subset K\},$$

где ψ — произвольный гомеоморфизм единичного круга B.

Граница множества $\{K\}$ и есть то множество Γ, которое требуется в теореме. Из непрерывности функций Φ и f следует, что $\Gamma\subset T_+$ или $\Gamma\subset T_-$.

Докажем, что в $\{K\}$ находится точка x_0 с описанными в теореме свойствами.

Допустим, что утверждение теоремы неверно. Это означает, что какую бы односвязную область L ни взяли, для которой $\partial L\subset T_-$, то $L\cap T_+ = \varnothing$, и, наоборот, если $\partial L\subset T_+$, то $L\cap T_- = \varnothing$, короче, $\{T_+\}\cap\{T_-\} = \varnothing$. Очевидно, расстояние между множествами $\{T_+\}$ и $\{T_-\}$ строго положительно в силу их замкнутости.

Рассмотрим непрерывную функцию $h(x)$, заданную на множестве $\{T_+\}\cup\{T_-\}$, которая принимает значение -1 на множестве $\{T_+\}$ и $+1$ на множестве $\{T_-\}$.

Очевидно, функция $h(x)$ гармоническая во внутренности множества $\{T_+\}\cup\{T_-\}$. Последнее множество удовлетворяет условиям леммы 3, и, следовательно, можно найти такое приближение $\Phi_1\in H$ к $h(x)$, для которого выполняются неравенства

$$\Phi_1(x_1) < 0 < \Phi_1(x_2),\ \forall\, x_1\in\{T_+\},\ \forall\, x_2\in\{T_-\}. \tag{6}$$

Но, согласно лемме 1, мера μ распадается естественным образом на две положительные меры ν_+, $\operatorname{supp}(\nu_+) \subset T_+$, и ν_-, $\operatorname{supp}(\nu_-) \subset T_-$, и тогда равенство (5) приобретает вид

$$\int_{\partial T_+} \Phi_1(x)\, d\nu'_+(x) = \int_{\partial T_-} \Phi_1(x)\, d\nu'_-(x),$$

которое противоречит неравенству (6). Необходимость доказана.

Доказательство достаточности следует из принципа максимума.

Допустим, что для $\Phi, \tilde{\Phi} \in H$ выполняется неравенство

$$\|\tilde{\Phi} - f\| < \|\Phi - f\|,$$

и для функции $\Phi(x)$ выполняются условия теоремы, причем считаем, что $\Gamma \subset T_+$, $x_0 \in T_-$.

Тогда выполнены неравенства $\Phi(x) - \tilde{\Phi}(x) > 0$, $\forall x \in \Gamma$, и $\Phi(x_0) - \tilde{\Phi}(x_0) < 0$, что противоречит принципу максимума, примененному к множеству $\{\Gamma\}$.

Утверждение настоящей теоремы было анонсировано на Международной конференции по математическим методам в исследовании операций в Софии в 1983 году. В ходе дискуссий проф. Брозовски (ФРГ) отметил, что для доказательства достаточности можно применить принцип максимума. Его предложением мы воспользовались в настоящей статье.

Summary

The necessary and sufficient condition is found for a harmonic function to have a minimal deviation from a given continuous one in the circle.

Литература

1. Курант Р. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.— 830 с. 2. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений.— М.: Изд-во МГУ, 1976.— 304 с. 3. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала.— М.: Наука, 1966.— 516 с. 4. Мергелян С. Н.— Успехи мат. наук, 1952, т. 7, вып. 2, с. 31—122.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило 30.03.84