

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НОВОГО КЛАССА ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СРЕДЕ

Стефка Димова, Милена Димова*, Даниела Василева*

ФМИ, Софийский университет "Св. Климент Охридский"

*ИМИ, Болгарская Академия Наук

"Современные проблемы вычислительной математики и
математической физики"

конференция посвященная памяти академика А.А. Самарского

в связи с 95-летием со дня его рождения

Москва, 16-17 июня 2014г.



$$u_t = \sum_{i=1}^N (k_i(u) u_{x_i})_{x_i} + Q(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

$$k_i(u) \geq 0, \quad Q(u) \geq 0, \quad u(t, x) \geq 0$$

$$k_i(u) = u^{\sigma_i}, \quad \sigma_i > 0, \quad Q(u) = u^\beta, \quad \beta > 1$$

А.А. Самарский, М.И. Соболев (1963), С.П. Курдюмов (1974), М.И. Бакирова, В.А. Галактионов, А.П. Михайлов, Ю.П. Попов, В.А. Дородницын, Г.Г. Еленин, Н.В. Змитренко, Е.С. Куркина, А.Б. Потапов, С. Посашков, С.Р. Свирцевский, ...

$$2D, \sigma_1 \neq \sigma_2, \sigma_i > 0, \quad Q(u) = u^\beta, \quad \beta > 1 :$$

**неограниченные решения, описывающие
направленное распространение тепла** (Дородницын, Князева)
численная реализация:

Бакирова М.И., Димова С.Н., Дородницын В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А., Свирцевский С.Р.: Инвариантные решения уравнения теплопроводности, описывающие направленное распространение тепла и спиральные волны в нелинейной среде. Докл.АН СССР. **33**(3), 187–189 (1988)



2D Изотропная среда

$$u_t = \frac{1}{r}(ru^\sigma u_r)_r + \frac{1}{r^2}(u^\sigma u_\varphi)_\varphi + u^\beta, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Свирщевский, 1985: $u_s(t, r, \varphi) = \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta(\xi, \phi),$

$$\xi = r \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{m}{\beta-1}}, \quad \phi = \varphi + \frac{C_0}{\beta-1} \ln\left(1 - \frac{t}{T_0}\right), \quad m = \frac{\beta - \sigma - 1}{2}$$

C_0 - параметр семейства решений. Для $C_0 \neq 0$:

$$r(t)e^{s\varphi(t)} = r(0)e^{s\varphi(0)} = \xi e^{s\phi} = \text{const}, \quad s = (\beta - \sigma - 1)/(2C_0).$$

$$-\frac{1\partial}{\xi\partial\xi}(\xi\theta^\sigma \frac{\partial\theta}{\partial\xi}) - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial\phi}(\theta^\sigma \frac{\partial\theta}{\partial\phi}) + \frac{m}{(\beta-1)T_0} \xi \frac{\partial\theta}{\partial\xi} - \frac{C_0}{(\beta-1)T_0} \frac{\partial\theta}{\partial\phi} + \theta - \theta^\beta = 0.$$



Два класса константных решений для $T_0 = \frac{1}{(\beta-1)}$: $\theta_H^0 \equiv 0$, $\theta_H \equiv 1$

$$C_0 = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \theta(\xi, \phi) = \theta_H^0 \equiv 0 :$$

$\beta > \sigma + 1$: конструированы два класса радиально-несимметричных решений сложной симметрии (Курдюмов, Куркина, Потапов)

Колева М.Г., Димова С.Н., Касчиев М.С.: Исследование собственных функций горения нелинейной среды в полярных координатах. Математическое моделирование **3**, 76–83 (1992)

$\beta \leq \sigma + 1$: только радиально-симметричные решения с компактным носителем.

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \theta(\xi, \phi) = \theta_H \equiv 1 :$$

два новых класса радиально-несимметричных решений в HS –режиме:

- решения сложной симметрии $C_0 = 0$,
- решения спиральной симметрии $C_0 \neq 0$.

Dimova S.N., Kastchiev M.S., Koleva M.G., Vasileva D.P., Numerical analysis of radially nonsymmetric blow-up solutions of a nonlinear parabolic problem, J. Comp. Appl. Math., 1998, 97, 81-97

Dimova M.G., Dimova S.N., Numerical investigation of spiral structure solutions of a nonlinear elliptic problems, NMA 2010, LNCS 6046, 395–403, 2011



2D радиально-несимметричный случай,
 $C_0 = 0, \beta = \sigma + 1$

$$u(t, r, \varphi) = g(t)\theta(\xi, \phi), \quad g(t) = (1-t/T_0)^{-1/\sigma}, \quad \xi = r, \quad \phi = \varphi,$$

$$\mathcal{L}(\theta) \equiv -\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) + \theta - \theta^{\sigma+1} = 0.$$

Начальные приближения

$$\tilde{\theta}(\xi, \phi) = 1 + \alpha y(\xi, \phi), \quad \alpha = \text{const}, \quad |\alpha y| \ll 1,$$

$y(\xi, \phi)$ ограниченное при $\xi = 0$ решение линейного уравнения:

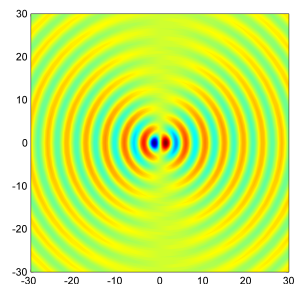
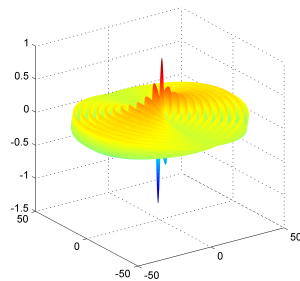
$$-\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} + \sigma y = 0.$$

Частные решения

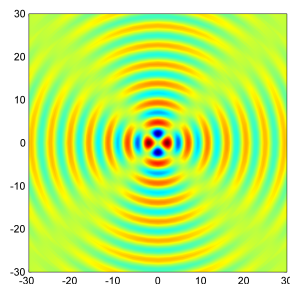
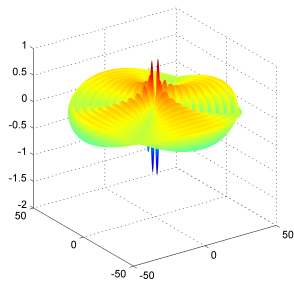
$$y(\xi, \phi) = J_k(\sqrt{\sigma}\xi) \cos(k\phi), \quad k \in N.$$

$y(\xi, \phi)$, $2\pi/k$ периодические, с k осями симметрии:

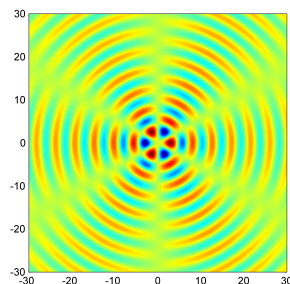
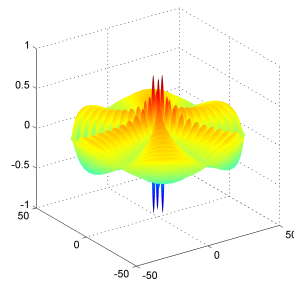




$k = 1$



$k = 2$



$k = 3$

ЛЪННАЯ

Fig. 1: Решения $y(\xi, \phi) = J_k(\sqrt{\sigma}\xi) \cos(k\phi)$ линеаризованного уравнения, $k = 1, 2, 3$.



Back

Close

$$J_k(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

$$y(\xi, \phi) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\sigma\xi}}} \cos\left(\sqrt{\sigma\xi} - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos(k\phi), \quad \xi \rightarrow \infty.$$

асимптотики для $\theta(\xi, \phi)$

$$\theta(\xi, \phi) \sim 1 + \gamma \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\sigma\xi}}} \cos\left(\sqrt{\sigma\xi} - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos(k\phi),$$

$$\gamma = \text{const}, \quad \xi \rightarrow \infty.$$



Автомодельная задача:

$$L(\theta) \equiv -\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) + \theta - \theta^{\sigma+1} = 0,$$

$$(\xi, \phi) \in \Omega, \quad \Omega = (0, l) \times (0, \omega), \quad \omega = \pi/k.$$

краевые условия

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0, \quad \phi \in [0, \omega],$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \frac{\theta - 1}{2\xi} = -\gamma \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\sigma \xi}}} \sin \left(\sqrt{\sigma \xi} - \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos(k\phi),$$

$$\xi = l \gg 1, \quad \phi \in [0, \omega],$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi}(\xi, 0) = \frac{\partial \theta}{\partial \phi}(\xi, \omega) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq l.$$



Численный метод для автомодельной задачи

Непрерывный аналог метода Ньютона (Гавурин, 1958)

$$0 \leq t < \infty, \quad \theta = \theta(\xi, \phi, t) :$$

$$L'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = -L(\theta), \quad \theta(\xi, \phi, 0) = \theta_0(\xi, \phi)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = v(\xi, \phi, t)$$

Итерационный процесс

$$L'(\theta_n) v_n = -L(\theta_n)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \tau_n v_n, \quad 0 < \tau_n \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\theta_n = \theta_n(\xi, \phi) = \theta(\xi, \phi, t_n), \quad v_n = v_n(\xi, \phi) = v(\xi, \phi, t_n),$$

$$\theta_0(\xi, \phi) = \theta_k(\xi, \phi) = 1 + \alpha J_k(\sqrt{\sigma} \xi) \cos(k\phi), \quad |\alpha y| \ll 1$$



на каждой итерации – Галеркин метод конечных элементов для линейной задачи
билинейные конечные элементы

$$A(\theta)\bar{V} = -B(\theta)\bar{\Theta}$$

$$V = \{v_n(\xi_j)\}_{j=1}^N, \quad A = LU$$

$$\tau_n = \min \left(1, \tau_{n-1} \frac{\delta_{n-1}}{\delta_n} \right), \text{ if } \delta_n < \delta_{n-1},$$

$$\tau_n = \max \left(\tau_0, \tau_{n-1} \frac{\delta_{n-1}}{\delta_n} \right), \text{ if } \delta_n \geq \delta_{n-1},$$

$$\delta_n = \max_{\eta \in \bar{\omega}_h} |B(\theta_n)\bar{\Theta}_n|, [, \dots, 1974]$$



Численный метод для параболической задачи

$$u_t = \frac{1}{r} (ru^\sigma u_r)_r + \frac{1}{r^2} (u^\sigma u_\varphi)_\varphi + u^{\sigma+1}, \quad 0 < t < T_0,$$

$$(r, \varphi) \in \Omega, \quad \Omega = (0, R) \times (0, \omega), \quad \omega = \pi/k,$$

$$ru^\sigma u_r(t, 0, \varphi) = 0, \quad t \in [0, T_0), \quad \varphi \in [0, \omega],$$

$$u(t, R, \varphi) = \frac{u(t, r^*, \varphi)}{\theta(r^*, \varphi)} \theta(R, \varphi), \quad t \in [0, T_0), \quad \varphi \in [0, \omega],$$

$$u(0, r, \varphi) = u_0(r, \varphi) = \theta_k(r, \varphi) \geq 0, \quad (r, \varphi) \in \bar{\Omega},$$

$$u^\sigma(t, r, 0)u_\varphi(t, r, 0) = u^\sigma(t, r, \omega)u_\varphi(t, r, \omega) = 0, \quad t \in [0, T_0), \quad r \in [0, R],$$

$$u_0(0, \varphi) = \text{const}, \quad u_0(r, \varphi) = u_0(r, 2\omega - \varphi).$$

Галеркин метод конечных элементов, основан на
 - **трансформацию Кирхофа** нелинейного коэффициента теплопроводности

$$G(u) = \int_0^u s^\sigma ds = u^{\sigma+1}/(\sigma + 1);$$

- интерполяция нелинейных коэффициентов;
- концентрация матрицы массы.



Полудискретная задача:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= -\tilde{M}^{-1}KG(U) + q(U) \\ U(0) &= U_0\end{aligned}$$

Модификация явного метода Рунге-Кутты второго порядка точности.

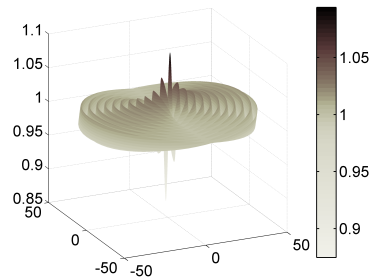
Численное исследование

Цель численных экспериментов:

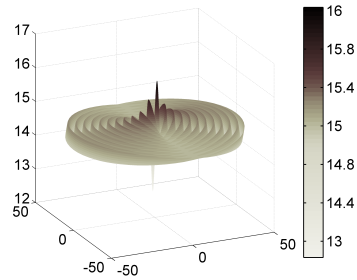
- исследовать устойчивость нового класса 2D-автомодельных решений,

В примерах ниже: $\sigma = 2$, $T_0 = 0.5$, $l = R = 50$,
 $h_r = 0.1$, $h_\varphi = \pi/30$, $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.2$.

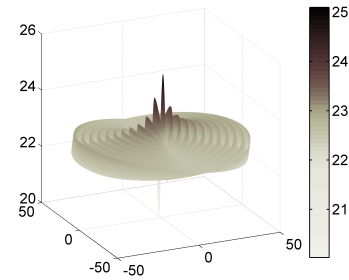




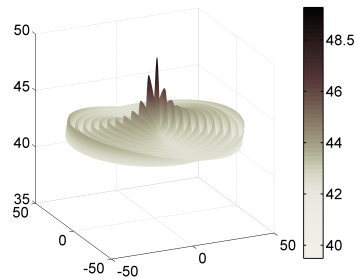
$t = 0$



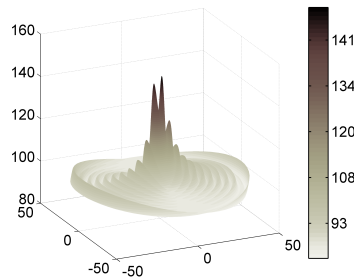
$t = 0.497634$



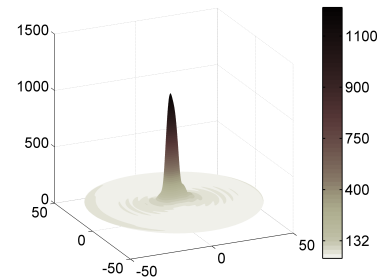
$t = 0.499014$



$t = 0.499722$



$t = 0.499945$



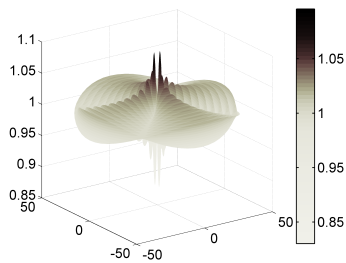
$t = 0.499973$

Fig. 2: Эволюция сложной волны в S-режиме: $u(t, r, \varphi)$, $\sigma = 2$, $k = 1$, $T_0 = 0.5$.

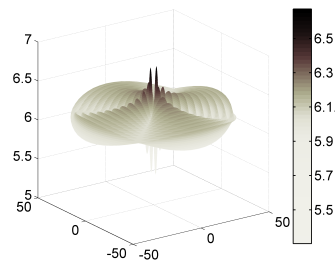


Back

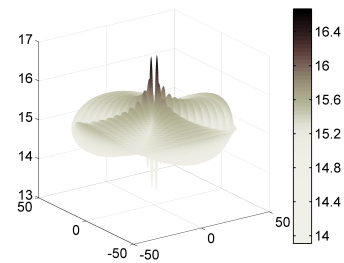
Close



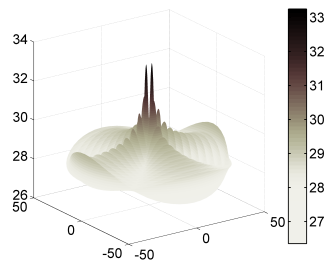
$t = 0$



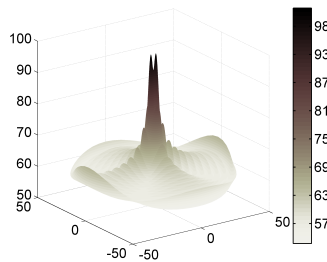
$t = 0.486748$



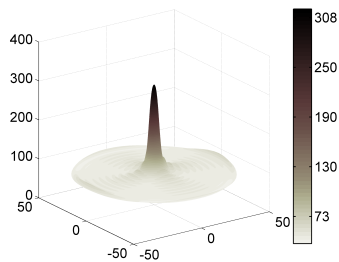
$t = 0.497776$



$t = 0.499367$



$t = 0.499856$



$t = 0.499914$

Fig. 3: Эволюция сложной волны в S-режиме: $\sigma = 2$, $k = 2$, $T_0 = 0.5$.



Back

Close

2D радиально-симметричный случай

$$u_t = \frac{1}{r} (ru^\sigma u_r)_r + u^{\sigma+1}, \quad r \in \mathbb{R}_+^1, \quad t > 0, \quad \sigma > 0.$$

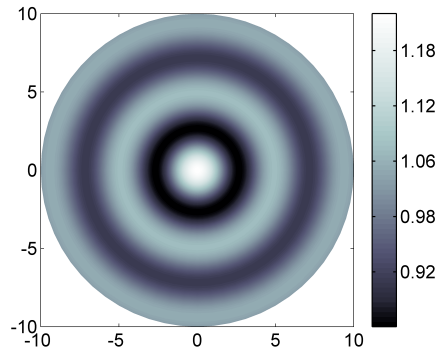
автомодельные неограниченные решения

$$u(t, r) = \psi(t)\theta(\xi) = \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \theta(\xi), \quad \xi = r \text{ for } \beta = \sigma + 1.$$

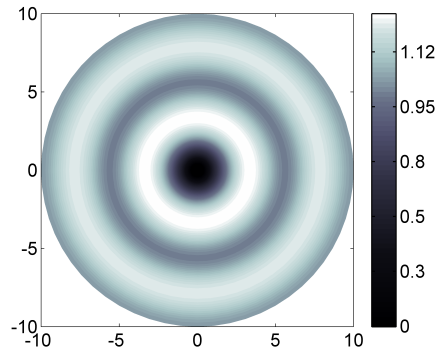
$$\mathcal{L}(\theta) \equiv -\frac{1}{\xi} (\xi\theta^\sigma \theta')' + \theta - \theta^{\sigma+1} = 0, \quad 0 < \xi < \infty.$$

$$u(0, r) = u_0(r) = \theta(r), \quad u_r(t, 0) = 0.$$





(a)



(b)

Fig. 4: Автомоделная функция $\theta(\xi)$ для $\sigma = 2$: (a) $\alpha = 0.1$; (b) $\alpha = -0.5$.

Ищем ограниченные на бесконечности решения, которые для конечного $R \gg 1$, $R < \infty$, удовлетворяют автомоделному закону:

$$u(t, R) = \frac{u(t, r^*)}{\theta(r^*)} \theta(R) \quad t > 0$$

при подходящем выборе точки $r^* \ll R$.



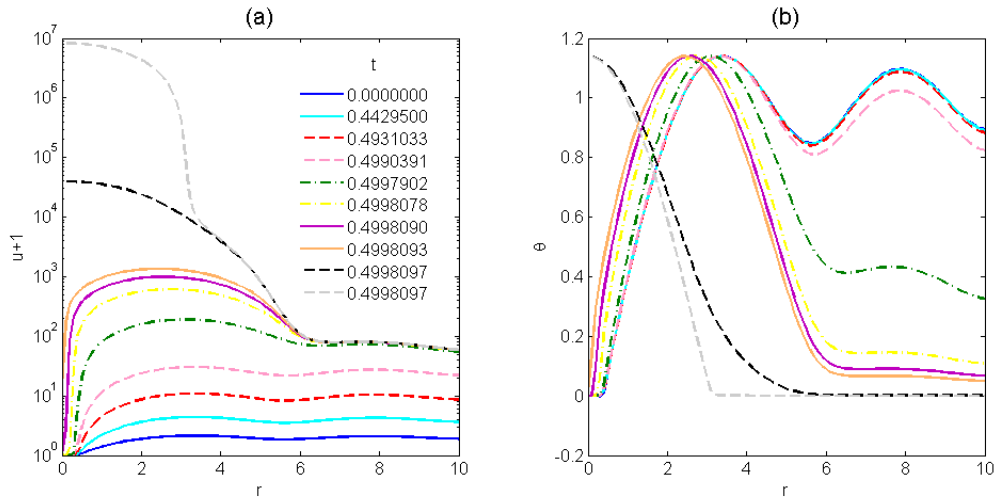


Fig. 5: Эволюция автомодельного решения $u(t, r)$ и его автомодельного представления. (увеличенное в области начала координат)

