PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

КРИТЕРИЙ ТИПА ДИНИ — ЛИПШИЦА ДЛЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ

ВЛАДИМИР Х. ХРИСТОВ

В статье доказан основывающийся на поведении модуля немонотонности критерий для равномерной сходимости интерполяционных полиномов 2π-периодической функции, построенных по $2n+1$ равноотстоящих узлов интерполяции.

1. В теории тригонометрической интерполяции функций один из важных вопросов это вопрос о нахождении условий, при которых интерполяционный полином $I_n(f;x)$ данной функции f стремится к $f(x)$ при $n\to\infty$. Известно, что на сходимость интерполяционных полиномов влияют как структурные свойства функции f, так и расположение узлов интерполяции. О сходимости $I_n(f;x)$ при общих системах интерполяционных узлов известно немного и поэтому почти при всех исследованиях рассматривается случай равноотстоящих узлов интерполяции. Под этим мы подразумеваем, что в случае нечетного числа узлов, узлами интерполяции для $I_n(f,x)$ являются произвольные $2n+1$ последовательные точки из множества $x_j^{(n)}=x_0^{(n)}+2\pi j/(2n+1)$, $j=0, \pm 1, \pm 2,\dots$ В дальнейшем мы будем опускать верхний индекс n.

Теперь заметим, что ядро Дирихле $D_n(u)=1/2+\Sigma_{k=1}^n \cos ku=\sin[(n+1/2)u]/2\sin(u/2)$ есть тригонометрический полином n-той степени такой, что $D_n(2\pi j/(2n+1))=0$, $j=1,2,\dots,2n$ и $D_n(0)=n+1/2$. Тогда полиномы $2D_n(x-x_1)/(2n+1)$, $j=0,1,\dots,2n$ являются фундаментальными полиномами для системы узлов $\{x_j^{(n)}\}_{j=0}^{2n}$, т. е.

$$\frac{2}{2n+1}D_n(x-x_j)=\begin{cases}1 & \text{при } x=x_j,\\ 0 & \text{при } x=x_k,\ k\neq j,\ k=0,1,\dots,2n.\end{cases}$$

Следовательно, если f — 2π-периодическая функция, то

$$I_n(f;x)=2/(2n+1)\sum_{j=0}^{2n} f(x_j)\,D_n(x-x_j).$$

Хорошо известен следующий критерий для сходимости интерполяционных полиномов $I_n(f;x)$, построенных по $2n+1$ равноотстоящих узлов:

Теорема 1 [1, с. 31]. *Если функция $f\in C_{2\pi}$ удовлетворяет условию Дини — Липшица*

$$(1)\qquad \lim_{\delta\to 0+} \omega(f;\delta)\ln(1/\delta)=0,$$

то $I_n(f;x)$ равномерно стремится к f, где, как обычно, $\omega(f;\delta)$ модуль непрерывности функции f.

Этот критерий точен в смысле, что существует функция f такая, что $\omega(f;\delta)=O\{1/\ln(1/\delta)\}$ и $I_n(f;x)$ расходится почти всюду [5].

В настоящей работе мы заменим в условии Дини — Липшица (1) модуль непрерывности $\omega(f;\delta)$ через модуль немонотонности $\mu(f;\delta)$ функции f. Модуль немонотонности $\mu(f;\delta)$ для произвольной функции f введен Бл. Сендовым [2] и определяется следующим образом

$$\mu(f;\delta)=\frac{1}{2}\sup_{|x_1-x_2|\leq\delta}\{\sup_{x_1\leq x\leq x_2}[\,|f(x_1)-f(x)|+|f(x_2)-f(x)|\,]-|f(x_1)-f(x_2)|\}.$$

Основным результатом этой статьи является следующее усиление теоремы 1:

Т е о р е м а 2. *Если $f\in C_{2\pi}$ и*

$$(2)\qquad \lim_{\delta\to +0} \mu(f;\delta)\ln(1/\delta)=0,$$

то $I_n(f;x)$ равномерно сходится к f.

Условие (2) для равномерной сходимости интерполяционных полиномов $I_n(f;x)$ функции f точно в смысле, что существует непрерывная функция f с модулем немонотонности $\mu(f;\delta)=O\{1/\ln(1/\delta)\}$ такая, что $I_n(f;x)$ расходится почти всюду.

Теорема 2 является усилением теоремы 1, потому что если выполнено условие (1), то выполнено и условие (2), так как для каждой функции $\mu(f;\delta)\leqq\omega(f;\delta)$ и, наоборот, легко построить пример функции, для которой (1) не выполнено, а (2) выполнено (даже эту функцию можно выбрать и с неограниченным изменением) [3].

Справедлива еще следующая

Т е о р е м а 3. *Для любой функций $f\in C_{2\pi}$ и для любого натурального n выполнено*

$$(3)\qquad |I_n(f;x)-f(x)|\leqq 4\mu(f;h)\ln n+16\ln n\sum_{k=1}^{[\ln n]}\frac{1}{k}(\mu(f;(k+1)h)-\mu(f;kh))+o(1),$$

где x любое, а $h=2\pi/(2n+1)$.

Теорема 2 следует из оценки (3), так как легко проверить, что если выполнено условие (2), то все члены в правой части (3) стремятся к нулю при $n\to\infty$.

Отметим, что результаты, аналогичные вышеизложенным, можно получить и для случая, когда интерполируется четным числом равноотстоящих узлов.

Доказательство теоремы 3 основано на следующих двух леммах:

Л е м м а 1. *Для любого $n>0$ и $m>0$ и для любой функции $f\in C_{2\pi}$ существуют функции $f_0, f_1,\dots,f_m$ и r_m такие, что*

$$\text{a)}\qquad f(x)=\sum_{k=0}^{m} f_k(x)+r_m(x),\quad f_k\in C_{2\pi},\quad r_m\in C_{2\pi},$$

б) $$\max_x f_k(x) \le \mu(f; (k+1)h) - \mu(f; kh),\ \mu(f_k, kh) = 0,$$

$$\omega(f_k, \delta) \le \omega(f; \delta),\ \delta \ge 0,\ k = 0, 1, \ldots m,$$

в) $$r_m(x) \le \max_x f(x),\ \mu(r_m, mh) = 0,$$

$$\omega(r_m, \delta) \le \omega(f; \delta),\ \delta \ge 0,$$

где $h = 2\pi/(2n+1)$.

Лемма 2. *Пусть* 2π-*периодическая функция* g *такова, что для некоторых* k *и* n $(0 < k \le n)$ *выполнено*

$$\mu(g; kh) = 0,\ h = 2\pi/(2n+1). \tag{4}$$

Пусть x *фиксированная точка и* p — *целое такое, что* $x_{p-1} < x \le x_p$, $x_p = x_0 + ph$. *Тогда*

$$\left|\frac{h}{\pi}\sum_{j=p+1}^{p+n} \frac{(-1)^j(g(x_j) - g(x))}{2\sin((x_j - x)/2)}\right| \le 2\max_{x_{p-1}\le x\le x_{p+1}} |g(x_{p+k}) - g(x)| \tag{5}$$

$$+\frac{4}{k}\max_x |g(x)|\ln(n+1),$$

$$\left|\frac{h}{\pi}\sum_{j=p-n}^{p-2} \frac{(-1)^j(g(x_j) - g(x))}{2\sin((x_j - x)/2)}\right| \le 2\max_{x_{p-1}\le x\le x_{p+1}} |g(x_{p-k-1}) - g(x)| \tag{6}$$

$$+\frac{4}{k}\max_x |g(x)|\ln(n+1).$$

Грубо говоря, лемма 2 выражает тот факт, что если для некоторой функции g выполнено условие (4), то

$$\max_x |I_n(g; x)| \le [C \ln n \max_x |g(x)|]/k,$$

а без условия (4), как известно [1, с. 33], $\max_x |I_n(g; x)| \le C \ln n . \max_x |g(x)|$.

Доказательство леммы 2. Легко видно, что условие (4) означает, что функция g монотонна на каждом интервале длины небольшей kh. Поэтому для оценки суммы с левой стороны (5) мы разобьем ее на несколько сумм, число членов которых не превышает k. Точнее

$$\left|\frac{h}{\pi}\sum_{j=p+1}^{p+n} \frac{(-1)^j(g(x_j) - g(x))}{2\sin((x_j - x)/2)}\right|$$

$$\le \sum_{s=0}^{[n/k]-1}\left|\frac{h}{\pi}\sum_{j=p+ks+1}^{p+k(s+1)} \frac{(-1)^j(g(x_j) - g(x))}{2\sin((x_j - x)/2)}\right| + \left|\frac{h}{\pi}\sum_{j=k[n/k]+1}^{n} \frac{(-1)^j(g(x_j) - g(x))}{2\sin((x_j - x)/2)}\right|.$$

Во внутренней сумме, делая преобразование Абеля [4, с. 17], получаем

$$\frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+ks+1}^{p+k(s+1)}\frac{(-1)^j(g(x_j)-g(x))}{2\sin((x_j-x)/2)}\right|$$

$$\leqq\frac{h}{\pi}\sum_{j=p+ks+1}^{p+k(s+1)-1}|g(x_j)-g(x_{j+1})|\left|\sum_{q=p+ks+1}^{j}\frac{(-1)^q}{2\sin((x_q-x)/2)}\right|$$

$$+\frac{h}{\pi}|g(x_{p+k(s+1)})-g(x)|\left|\sum_{q=p+ks+1}^{p+k(s+1)}\frac{(-1)^q}{2\sin((x_q-x)/2)}\right|$$

$$\leqq\frac{h}{|x-x_{p+ks+1}|}\cdot\sum_{j=p+ks+1}^{p+k(s+1)-1}|g(x_j)-g(x_{j+1})|+\frac{h}{|x-x_{p+ks+1}|}\cdot|g(x_{p+k(s+1)})-g(x)|$$

$$\leqq\frac{1}{ks+1}\left(|g(x_{p+ks+1})-g(x_{p+k(s+1)})|+|g(x_{p+k(s+1)})-g(x)|\right).$$

Заметим, что

$$\sum_{j=p+ks+1}^{p+k(s+1)-1}|g(x_j)-g(x_{j+1})|=\left|\sum_{j=p+ks+1}^{p+k(s+1)-1}g(x_j)-g(x_{j+1})\right|,$$

так как g монотонна на интервале $[(p+ks+1)h,\ (p+ks+k)h]$ и, следовательно, все разности $g(x_j)-g(x_{j+1})$ имеют одинаковый знак.

Совершенно аналогично, делая преобразование Абеля, получаем

$$\frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+k[n/k]+1}^{p+n}\frac{(-1)^j(g(x_j)-g(x))}{2\sin((x-x_j)/2)}\right|$$

$$\leqq\frac{1}{k[n/k]+1}\left(|g(x_{p+k[n/k]})-g(x_{p+n})|+|g(x_{p+n})-g(x)|\right).$$

Учитывая все эти оценки, получаем

$$h/\pi\left|\sum_{j=p+1}^{p+n}\frac{(-1)^j(g(x_j)-g(x))}{2\sin((x_j-x)/2)}\right|$$

$$\leqq\sum_{s=0}^{[n/k]-1}\frac{1}{ks+1}\left(|g(x_{p+ks+1})-g(x_{p+k(s+1)})|+|g(x_{p+k(s+1)})-g(x)|\right)$$

$$+\frac{1}{k[n/k]+1}\left(|g(x_{p+k[n/k]+1})-g(x_{p+n})|+|g(x_{p+n})-g(x)|\right)$$

$$\leqq|g(x_{p+1})-g(x_{p+k})|+|g(x_{p+k})-g(x)|+\sum_{s=1}^{[n/k]}\frac{1}{ks}\cdot 4\max_x|g(x)|$$

$$\leqq 2\max_{x_{p-1}\leqq x\leqq x_{p+1}}|g(x_{p+k})-g(x)|+\frac{4}{k}\max_x|g(x)|\ln(n+1).$$

Оценка (6) получается аналогично.

Доказательство теоремы 3. Пусть n и x фиксированы и целое число p такое, что $x_{p-1}<x\leq x_p$, $x_p=x_0+ph$. Оценим

$$I_n(f;x)-f(x)=\frac{h}{\pi}\sum_{j=0}^{2n}(f(x_j)-f(x))D_n(x-x_j)$$

$$=\frac{h}{\pi}\sum_{j=p-n}^{p+n}(f(x_j)-f(x))D_n(x-x_j)$$

$$=\frac{h}{\pi}\left|\sin((n+1/2)(x-x_p))\sum_{j=p-n}^{p+n}\frac{(-1)^j(f(x_j)-f(x))}{2\sin((x-x_j)/2)}\right|$$

$$\leq\frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p-n}^{p-2}\right|+\frac{h}{\pi}\left|\sin((n+1/2)(x-x_p))\sum_{j=p-1}^{p}\right|+\frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+1}^{p+n}\right|=B_1+B_2+B_3.$$

Легко видно, что $B_2\leq 2\omega(f;h)=o(1)$.

В сумме B_3 воспользуемся разложением функции f из леммы 1 с $m=[\ln^2 n]$. Получаем

$$B_3=\frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+1}^{p+n}\frac{(-1)^j(f(x_j)-f(x))}{2\sin((x-x_j)/2)}\right|$$

$$\leq\frac{h}{\pi}\sum_{k=0}^{m}\left|\sum_{j=p+1}^{p+n}\frac{(-1)^j(f_k(x_j)-f_k(x))}{2\sin((x-x_j)/2)}\right|+\frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+1}^{p+n}\frac{(-1)^j(r_m(x_j)-r_m(x))}{2\sin((x-x_j)/2)}\right|.$$

Для оценки внутренних сумм в случае $k=1,2,\ldots,m$ и для оценки последней суммы воспользуемся леммой 2, учитывая, что функции f_k таковы, что $\max_x|f_k(x)|\leq\mu(f;(k+1)h)-\mu(f;kh)$ и $\mu(f_k,kh)=0$. Тогда получаем

$$B_3\leq\frac{h}{\pi}\left|\sum_{j=p+1}^{p+n}\frac{(-1)^j(f_0(x_j)-f_0(x))}{2\sin((x-x_j)/2)}\right|+2\sum_{k=1}^{m}\max_{x_{p-1}\leq x\leq x_{p+1}}|f_k(x)-f_k(x_{p+k})|$$

$$+4\ln(n+1)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\max_x|f_k(x)|+2\max_{x_{p-1}\leq x\leq x_{p+1}}|r_m(x_{p+m})-r_m(x)|$$

$$+\frac{4\ln(n+1)}{m}\max_x|r_m(x)|\leq\frac{h}{\pi}2\max_x|f_0(x)|\sum_{j=p+1}^{p+n}\frac{1}{2\sin((x-x_j)/2)}$$

$$+2\sum_{k=1}^{m}2\max_x|f_k(x)|+4\ln(n+1)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}(\mu(f;(k+1)h)-\mu(f;kh))+2\omega(r_m,2mh)$$

$$+\frac{4\ln(n+1)}{m}\max_x|f(x)|\leq h\mu(f,h)\sum_{j=p+1}^{p+n}\frac{1}{(x-x_j)}+4\sum_{k=1}^{m}(\mu(f;(k+1)h)-\mu(f;kh))$$

$$+4\ln(n+1)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}(\mu(f;(k+1)h)-\mu(f;kh))+2\omega(f,2mh)+o(1)$$

$$\leqq \mu(f;h)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+4(\mu(f;(m+1)h)-\mu(f;h))$$

$$+\ 4\ln(n+1)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}(\mu(f;(k+1)h)-\mu(f;kh))+o(1)$$

$$\leqq 2\mu(f;h)\ln n+8\ln n\sum_{k=1}^{[\ln^2 n]}\frac{1}{k}(\mu(f;(k+1)h)-\mu(f;kh))+o(1).$$

Аналогично оценивается и B_1, чем и заканчивается доказательство теоремы 3.

Наконец, заметим, что аналоги теоремы **2** и теоремы 3 для рядов Фурье получены ранее совместно с П. П. Петрушевым [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, Т. II Москва, 1965.
2. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближения функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5 (149), 141—178.
3. В. Х. Христов, П. П. Петрушев. Одно улучшение критерия Дини — Липшица для равномерной сходимости ряда Фурье. *Доклады БАН*, **29**, 1976, № 11, 1579—1582.
4. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
5. А. А. Привалов. О расходимости интерполяционных процессов в фиксированной точке. *Мат. сборник*, **66** (108), 1965, № 2, 272 — 286.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 29. 9. 1976