PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МЕТРИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ КОМПАКТА НАИЛУЧШИМИ СТУПЕНЧАТЫМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОМПАКТЕ

ГЕОРГИ А. ТОТКОВ

Поставлен вопрос об определении верхней метрической размерности компакта K через наилучшие равномерные приближения непрерывных функций на компакте разными классами ступенчатых. Рассмотрены приближения ступенчатыми: 1) на квадратной и прямоугольной сетке в R^s, 2) на сетке из связных подмножеств K в метрическом пространстве X функциями. Оказывается, например, что в случае 1) верхнюю метрическую размерность можно полностью определить, зная порядок наилучшего равномерного приближения ступенчатыми. В случае 2) встречаются некоторые принципиальные трудности, требующие дополнительные ограничения на компакте K.

1. Введение. Цель настоящей работы исследовать связь метрической (хаусдорфовой) размерности компакта K в произвольном метрическом пространстве X (в частности в R^s) и наилучшего равномерного приближения функций из $C(K)$ разными классами ступенчатых функций на K. Точнее, рассмотрены две задачи: а) прямая, что можно сказать о порядке наилучшего равномерного приближения функций из $C(K)$ ступенчатыми, если известно $\alpha=\overline{\mathrm{dm}}(K)$ верхняя метрическая размерность компакта K, и б) обратная, если известен порядок наилучшего равномерного приближения всех непрерывных на компакте K функций ступенчатыми, что можно сказать о метрической размерности K.

Оказывается возможным полностью охарактеризовать понятие верхней метрической размерности K в R^s приближением функций из $C(K)$ ступенчатыми на квадратной и на некоторых прямоугольных сетках (см. определения А), Б), теоремы 1 и 3). В случае аппроксимации ступенчатыми на связном покрытии из подмножеств K (см. определение B)), чтобы полностью охарактеризовать метрическую размерность K, необходимо ввести дополнительное ограничение на компакт K (пример 1, теоремы 2 и 3).

Напомним некоторые понятия и факты [1], [2], [3].

Пусть K — компакт в метрическом пространстве X с метрикой ρ. Обозначим [1] для $\varepsilon>0: N_\varepsilon(K)$ — минимальное число множеств в X диаметрами $\leqq\varepsilon$, покрывающих K; $M_\varepsilon(K)$ — максимальное число элементов в ε-различимом подмножестве компакта K. Верхняя и нижняя метрическая (хаусдорфовая) размерность K определяются: $(\mathrm{ld}(\cdot)=\log_2(\cdot))$

$$\begin{aligned}&\alpha=\overline{\mathrm{dm}}(K)=\limsup\nolimits_{\varepsilon\to 0}\mathrm{ld}\,N_\varepsilon(K)/\mathrm{ld}\,\varepsilon^{-1},\\ &\underline{\alpha}=\underline{\mathrm{dm}}(K)=\liminf\nolimits_{\varepsilon\to 0}\mathrm{ld}\,N_\varepsilon(K)/\mathrm{ld}\,\varepsilon^{-1}.\end{aligned}\tag{1}$$

Если $\overline{\alpha}=\underline{\alpha}=\alpha=\mathrm{dm}(K)$, то α называется метрической размерностью K. Как известно [1]: $\alpha\leqq s$, когда $K\subset R^s$, и в (1) можно заменить $N_\varepsilon(K)$ на $M_\varepsilon(K)$.

Пусть p — натуральное и

$$\Pi_p=\{\{V_i\}_{i=1}^p:\bigcup_{i=1}^p V_i\supset K,\ V_j\cap \mathrm{Int}_K(V_i)=\varnothing \quad \text{для} \quad i\neq j\},$$

где $\mathrm{Int}_K(V)$ — внутренность множества V относительно топологии, которую ρ индуцирует на K. Для $\varepsilon>0$ будем рассматривать $L=L_\varepsilon(K)$ — минимальное число связных подмножеств $\{V_i\}_{i=1}^L$ множества K, для которых $\mathrm{diam}(V_i)\leqq\varepsilon$ и $\{V_i\}_{i=1}^L\in\Pi_L$. Отметим, что возможно $L_\varepsilon(K)=\infty$, даже когда K — связный компакт (континуум) в R^2.

В дальнейшем будем обозначать для функции f, определенной на K: $\|f\|_K=\sup\{|f(x)|:x\in K\}$ и для $\delta>0$

$$\omega(f;\delta)=\sup\{|f(x)-f(y)|:x,y\in K,\ \rho(x,y)\leqq\delta\}.$$

Теперь введем разные классы ступенчатых функций на компакте K в R^s и в X. Для простоты в первом случае будем рассматривать $s=2$ и считать, что $K\subset\Omega=[0,1]\times[0,1]$.

А. Пусть $\{\Delta_{ij}\}$ сеть на Ω из квадратиков со сторонами длиной n^{-1} и параллельных ординатным осям, а $\{\Delta_{ij}^p\}_{p=1}^{\min(n)}$ те из $\{\Delta_{ij}\}$, для которых $\Delta_{ij}\cap K\neq\varnothing$. Введем класс

$$S=S(n,0)=\{s(x):s(x)=\mathrm{const}\,(p),\ x\in\Delta_{ij}^p\cap K\}$$

Б. Пусть $\{\Delta_{ij}\}$ — прямоугольная сеть на Ω, определенная узлами:

$$0=x_0\leqq x_1\leqq\ldots\leqq x_n=1 \quad \text{и} \quad 0=y_0\leqq y_1\leqq\ldots\leqq y_n=1.$$

Далее $\{\Delta_{ij}^p\}_{p=1}^{l(n)}$ те из $\{\Delta_{ij}\}$, для которых $\Delta_{ij}\cap K\neq\varnothing$. Будем рассматривать в дальнейшем такие $\{\Delta_{ij}\}$, для которых $\mathrm{diam}(\Delta_{ij}^p)=O(\mathrm{ld}\,n/n)$, $p=1,2,\ldots l(n)$. Рассмотрим класс

$$\tilde{S}=\tilde{S}(n,0)=\{s(x):s(x)=\mathrm{const}(p),\ x\in\Delta_{ij}^p\cap K\}$$

В. Введем и класс

$$S^j=S^j(n,0)=\{s(x):s(x)=\mathrm{const}(p),x\in V_p;\ V_p\subset K,\ V_p\text{ — связные},\ \{V_p\}_{p=1}^n\in\Pi_n\}.$$

Заметим, что допустима многозначность функций из классов S, $\tilde{S}$ и S^j на границах Δ_{ij} и V_p соответственно. Это возможно в силу непрерывности f.

Если функция $f\in C(K)$, то наилучшее равномерное приближение (н. р. п.) ступенчатыми из класса $S^j(n,0)$ будем называть число

$$E_n(f;S^j)=\inf\{\|f-s\|_K:s\in S^j(n,0)\}.$$

Пусть n — целое, положительное и m — минимальное натуральное число, для которого $n\leqq l(m)$ (см. опр. Б). Тогда обозначим через $E_n(f;\tilde{S})=\inf\{\|f-s\|_K:s\in\tilde{S}(m,0)\}$ н. р. п. функции f ступенчатыми из класса $\tilde{S}(m,0)$. Аналогично вводим и $E_n(f;S)$.

2. Прямые теоремы. В этой части сформулируем и докажем некоторые прямые теоремы. Не трудно заметить, что для любой функции $f \in C(K)$ выполнено

$$E_n(f;\, S) \geq E_n(f;\, S). \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть K — компакт в R^2 и $\alpha = \overline{\mathrm{dm}}\,(K)$. Тогда для $\delta > 0$ существует константа c_1, зависящая только от K и δ, такая, что если функция $f \in C(K)$, то*

$$E_n(f;\, S) \leq \omega(f;\, c_1\, n^{-1/(\alpha+\delta)}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $f \in C(K)$ и $\{\Delta_{ij}^p\}_{p=1}^{m(n)}$ квадратики из А). Известно [1], что $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \mathrm{ld}\, m(n)/\mathrm{ld}\, n$. Следовательно, для $\delta > 0$ существует константа c_2, такая, что $m(n) \leq c_2 n^{\alpha+\delta}$ для любого натурального n. В каждом Δ_{ij}^p выбираем и фиксируем $x_p \in K \cap \Delta_{ij}^p$, $p = 1, 2, \ldots, m(n)$. Построим функцию $s(x) \in S(m, 0)$, полагая $s(x) = f(x_p)$, если $x \in \Delta_{ij}^p \cap K$. Так как в R^2 все нормы эквивалентны, то для некоторого c_3:

$$\rho(x, x_p) \leq c_3/n, \quad \text{если } x \in \Delta_{ij}^p. \tag{4}$$

Отсюда сразу следует, что для $x \in \Delta_{ij}^p \cap K$

$$|f(x) - s(x)| = |f(x) - f(x_p)| \leq \omega(f;\, \rho(x, x_p)) \leq \omega(f;\, c_3/n).$$

Это означает, что $E_{[c_2 n^{\alpha+\delta}]}(f;\, S) \leq \omega(f;\, c_3/n)$, $n = 1, 2 \ldots$, или для некоторого c_1 выполнено (3).

Из (2) и теоремы 1 получается прямая теорема и для класса S.

Пример 1. Для следующего примера я во многом обязан Т. П. Боянову.

Обозначим через $\varphi(n)$ положительную растущую функцию натурального аргумента n, принимающая только целочисленные значения, которую определим точнее в дальнейшем. Рассмотрим следующий локально связный континуум K плоскости Oxy. K состоит из отрезков:

$$\{(x, y) : x = 1/n - k/2n(n+1)\varphi(n),\ 0 \leq y \leq 2x\},\ k = 0, 1, \ldots, \varphi(n),\ n = 2, 3, \ldots$$

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1/2,\ y = 0\}.$$

Покажем теперь, что для непрерывной на K функции $F(x, y) \equiv y$ невозможно выполнение неравенств:

$$E_n(F;\, S^j) \leq \omega(F;\, c_1\, n^{-1/(2+\delta)}), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

если c_1 — константа, не зависящая от n, т. е. невозможен аналог теоремы 2.1 в классе S^j.

Действительно, если (5) выполнено и $m = [n^{2+\delta}]$, то для некоторой системы $\{V_p\}_{p=1}^m$ из В и для констант $c(p)$, $p = 1, 2, \ldots, m$ имеем: для $(x, y) \in V_p$

$$|F(x, y) - c(p)| \leq \omega(F;\, c_1/n) \tag{6}$$

$$= \sup\{|y_1 - y_2| : P_i = (x_i, y_i) \in K,\ i = 1, 2,\ \rho(P_1, P_2) \leq c_1/n\}.$$

Используя, что $\rho_1(P_1 P_2)=\max(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|)$ и $\rho(P_1, P_2)$ эквивалентны в R^2, из (6) для константы c_4, не зависящей от n, вытекает: $|F(x, y)-c(p)|\leqq c_4/n$, если $(x, y)\in V_p$. Тогда для $(x, y), (x', y')\in V_p$:

$$(7)\qquad |F(x, y)-F(x', y')|\leqq|F(x, y)-c(p)|+|F(x', y')-c(p)|\leqq 2c_4/n.$$

Из построения K и (7) следует, что для $n=1, 2,\ldots$

$$[n^{2+\delta}]\geqq\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(l),\ \text{где}\ l=[n/2c_4].$$

Если выбрать $\varphi(n)$ быстро растущей (достаточно положить $\varphi(n)=n^3$), то предыдущее невозможно для всех n и константы c_4, не зависящей от n. Аналогично можно показать невозможность неравенств

$$E_n(F; S^j)\leqq\omega(F; \psi(n)),\qquad n=1, 2, \ldots.$$

где $\psi(n)$ произвольная убывающая функция натурального аргумента.

Пример 1 показывает, что нельзя установить аналог теоремы 1 для аппроксимации элементами из S^j без дополнительных ограничений на компакт K. Пример 1 указывает также на то, что дополнительным условием надо ограничить слишком быстрый рост $L_\varepsilon(K)$ при $\varepsilon\to 0$.

Условие 1. Если $L_\varepsilon(K)=c(K, \varepsilon)N_\varepsilon(K)$, то $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{ld}\, C(K, \varepsilon)/\mathrm{ld}\,\varepsilon^{-1}=0$.
Нетрудно показать, что из (1) вытекает:

$$(8)\qquad \alpha=\overline{\mathrm{dm}}(K)=\limsup_{\varepsilon\to 0}\mathrm{ld}\, L_\varepsilon(K)/\mathrm{ld}\,\varepsilon^{-1}.$$

Если компакт K удовлетворяет условие (1), то необходимо K — локально связный.

Теорема 2. *Пусть K — компакт в метрическом пространстве $X, \alpha=\overline{\mathrm{dm}}(K)$, и выполнено условие* (1). *Тогда для любого $\delta>0$ существует константа c_1, зависящая только от K и δ, такая, что если функция $f\in C(K)$, то*

$$(9)\qquad E_n(f; S^j)\leqq\omega(f; c_1 n^{-1/(\alpha+\delta)}),\qquad n=1, 2,\ldots.$$

Доказательство в принципе не отличается от доказательства теоремы 1. Необходимо только заметить, что число покрывающих K связных подмножеств $\{V_p\}_{p=1}^L$ из B с диаметрами $\leqq n^{-1}$ равно $L=L_{1/n}(K)$, и в силу условия (1), $L\leqq C_5 n^{\alpha+\delta}$ для константы c_5, не зависящей от n.

3. Обратные теоремы. В этой части установим некоторые обратные теоремы.

Лемма 1. *Пусть W_0 и W_1 подмножества метрического пространства X и $\rho(W_0, W_1)=\varepsilon_0>0$. Тогда существует функция $F\in C(X)$, для которой:*

$$(10)\qquad F(x)=1,\ x\in W_1,$$

$$(11)\qquad F(x)=0,\ x\in W_0,$$

$$(12)\qquad |F(x)-F(y)|\leqq\rho(x, y)[\rho(x, y)+\rho(y, W_0)+\rho(x, W_1)]/\varepsilon_0^2,\ x, y\in X.$$

Доказательство. Нетрудно установить, что для функции $F(x)=\rho(x, W_0)/[\rho(x, W_0)+\rho(x, W_1)]$ выполнены (10) и (11). Для доказательства (12) последовательно имеем:

$$F(x)-F(y)=\frac{\rho(x,W_0)\rho(y,W_1)-\rho(x,W_1)\rho(y,W_0)}{[\rho(x,W_0)+\rho(x,W_1)][\rho(y,W_0)+\rho(y,W_1)]}$$

$$\leqq\{[\rho(x,y)+\rho(y,W_0)][\rho(y,x)+\rho(x,W_1)]-\rho(x,W_1)\rho(y,W_0)\}/\varepsilon_0^2$$

$$=\rho(x,y)[\rho(x,y)+\rho(y,W_0)+\rho(x,W_1)]/\varepsilon_0^2.$$

Теорема 3. *Пусть K — конечная сумма непересекающихся континуумов в R^2, $\alpha>0$, и для любого $\delta>0$ существует константа c_1, зависящая только от K и δ, такая, что если функция $f\in C(K)$, то*

(13) $$E_n(f;S)\leqq\omega(f;\ c_1 n^{-1/(\alpha+\delta)}),\quad n=1,2,\ldots.$$ Тогда

(14) $$\mathrm{dm}\,(K)\leqq\alpha.$$

Доказательство. Допустим, что $\alpha'=\mathrm{dm}(K)>\alpha+\tau$, где $\tau>0$. Пусть $\varepsilon>0$ так выбрано, что $1>\varepsilon>\alpha/(\alpha+\tau)$. Найдем и фиксируем $\delta>0$ таким образом:

(15) $$1>\varepsilon>(\alpha+\delta)/(\alpha+\tau).$$

Из определения α' следует, что существует подпоследовательность натуральных чисел (обозначим ее опять через $\{n\}$), для которой в K существуют $M=M_{1/n}(K)\geqq n^{\varepsilon(\alpha+\tau)}$ точек $\{z_i\}_{i=1}^M$, образующие $n^{-\varepsilon}$-различимое подмножество K. Пусть $S_i=\{y\in R^2:\rho(z_i,y)=n^{-\varepsilon}/4\}$, $i=1,2,\ldots,M$. Для множеств $W_1=\{z_1,z_2,\ldots,z_M\}$ и $W_0=\{S_1\cap K, S_2\cap K,\ldots,S_M\cap K\}$, по лемме 1 построим непрерывную функцию $F(x)$. Для $F(x)$ и δ в силу (13) существуют прямоугольники $\{\Delta_{ij}^p\}_{p=1}^m$ и константы $c(p)$, $p=1,\ldots,m$, где $m=[n^{\alpha+\delta}]$, и такие, что

(16) $$F(x)-c(p)\leqq\omega(F;c_1/n),\ \text{если } x\in\Delta_{ij}^p\cap K,$$

(17) $$\mathrm{diam}\,(\Delta_{ij}^p)\leqq c\,\mathrm{ld}\,n/n\ \ (c\ \text{— константа, не зависящая от } n).$$

С другой стороны, существует Δ_{ij}^p, содержащее не менее чем $n^{\varepsilon(\alpha+\tau)-(\alpha+\delta)}=n^{\delta_0}$ точек $\{z_i\}$ ($\delta_0>0$). Последнее противоречит (17), так как $\{z_i\}_{i=1}^M$ является $n^{-\varepsilon}$-различимым подмножеством K. Это завершает доказательство.

Из (2) и теоремы 3 можно получить обратную теорему и для класса S.

Теорема 4. *Пусть K — конечная сумма непересекающихся континуумов в метрическом пространстве X, $\alpha>0$ и для любого $\delta>0$ существует константа c_1, зависящая только от K и δ, такая, что из $f\in C(K)$ следует*

(18) $$E_n(f;S^j)\leqq\omega(f;c_1 n^{-1/(\alpha+\delta)}),\quad n=1,2,\ldots$$

Тогда: а) $\mathrm{dm}(K)\leqq\alpha$; *б) K — локально связное множество.*

Доказательство а) использует конструкцию функции $F(x)$ в доказательстве теоремы 3. 1. Выполнены:

$$(19)\qquad \rho(W_0, W_1)=n^{-\varepsilon}/4,\ \rho(x, W_1)\leqq n^{-\varepsilon},\ \text{и}\ \rho(x, W_1)+\rho(y, W_0)\leqq 5n^{-\varepsilon}/4$$
$$\text{для}\ x, y\in K.$$

Из (12) и (19) вытекает, что если $x, y \in K$ и $\rho(x, y)\leqq c_1/n$, то

$$F(x)-F(y)\leqq\rho(x, y)[\rho(x, y)+\rho(x, W_1)+\rho(y, W_0)]/[\rho(W_0, W_1)]^2$$
$$\leqq 16\, c_1^2(n^\varepsilon/n)^2+36\, c_1 n^\varepsilon/n=\psi(n, c_1).$$

Меняя роль x и y, получаем

$$(20)\qquad \omega(F; c_1/n)\leqq\psi(n, c_1),$$

где $\lim_{n\to\infty}\psi(n, c_1)=0$ (напомним, что $\varepsilon<1$). Пусть $\{V_p\}_{p=1}^m\in\Pi_m$ связные подмножества K и $\{c(p)\}_{p=1}^m$ такие константы, что в соответствии с условиями (18) и (20) для $x\in V_p$ имеет место неравенство

$$(21)\qquad |F(x)-c(p)|\leqq\omega(F; c_1/n)\leqq\psi(n, c_1),\ p=1,\ldots, m,\ m=[n^{\alpha+\delta}].$$

Тогда, если n — достаточно большое, то существуют не менее чем $M/n^{\alpha+\delta}\geqq n^{\varepsilon(\alpha+\tau)-(\alpha+\delta)}\geqq 2$ точек из $\{z_i\}$, принадлежащих какому-нибудь V_p. Пусть для конкретности $z_1, z_2\in V_1$. Тогда

$$(22)\qquad |1-c(1)|=|F(z_i)-c(1)|\leqq\psi(n, c_1),\ i=1, 2.$$

Так как V^1 связное, то легко заметить, что из $z_1\in V_1$ следует: существует $y_1\in K\cap S_1\cap V_1$ (иначе, если $V_1'=\{y\in V_1:\rho(y, z_1)\leqq n^{-\varepsilon}/4\}$, $V_1''=V_1\setminus V_1'$, то V_1' и V_1'' будут отделимыми множествами, и $V_1'\cup V_1''=V_1$, т. е. V_1 будет несвязным). По построению $F(y_1)=0$, а из $y_1\in V_1$ получаем

$$(23)\qquad |c(1)|=|F(y_1)-c(1)|\leqq\psi(n, c_1).$$

Из (22) и (23) вытекает $(n=1, 2,\ldots)$

$$1\leqq|1-c(1)|+|c(1)|\leqq 2\psi(n, c_1),\ \text{что противоречит}\ \psi(n, c_1)\xrightarrow{n} 0.$$

Доказательство б). Обозначим [3] $\rho_r(x, y)=\inf_V \operatorname{diam}(V)$, где inf берется по связным подмножествам $V\subset K$, содержащих x и y. В начале покажем, что

$$(24)\qquad \lim_{y\xrightarrow{\rho}x}\rho_r(x, y)=0,\quad x, y\in K.$$

Действительно, если (24) не выполнено, то для некоторых $x_0\in K$, $\varepsilon_0>0$ и $\{y_n\in K\}_{n=1}^\infty$:

$$(25)\qquad \rho(x_0, y_n)\leqq n^{-1},\ \rho_r(x_0, y_n)\geqq\varepsilon.$$

Пусть $d=\max\{\rho(x_0, y): y\in K\}$, $c_0=\min(d, \varepsilon_0)$ и

$$W_1=\{y\in K:\rho(x_0, y)\leqq c_0/4\},\ W_0=\{y\in K:\rho(x_0, y)\geqq 3c_0/4\}.$$

Построим по лемме 1 для непустых множеств W_0 и W_1 непрерывную функцию $F(x)$, для которой выполнены (10) — (12). От (12) получается для $\delta>0$.

$$(26)\qquad \omega(F; \delta)\leqq 3\,\delta\operatorname{diam}(K)/(c_0/2)^2=c_2\delta.$$

Из (18) и (26) следует, что для $c_3=c_1c_2$ и $m=]n^{\alpha+\delta}[$:

(27) $$E_m(F;S^j)\leqq c_3/n.$$

Пусть $\{V_p\}_{p=1}^m\in\Pi_m$ те связные подмножества K и $\{c(p)\}_{p=1}^m$ те константы, для которых согласно (27) $F(x)-c(p)\leqq c_3/n$, если $x\in V_p$. Тогда существует множество (напр., V_1), которое содержит бесконечное число элементов $\{y_n\}$. Следовательно, для некоторой подпоследовательности $\{e\}\subset\{n\}$

(28) $$1-c(1)=F(y_e)-c(1)\leqq c_3/n.$$

Из (25) имеем, что $x_0\in V_1$. Так как V_1 связное и $x_0, y_e\in V$, то $\operatorname{diam}(V_1)\geqq\varepsilon_0$. Тогда найдется $z\in V_1\subset K:\rho(x_0,z)\geqq\varepsilon_0/2$, т. е. $F(z)=0$. С другой стороны, для некоторой $\{z_n\in V_1\}_{n=1}^\infty$, $\rho(z_n,z)\xrightarrow{n}0$:

(29) $$F(z_n)=F(z_n)-F(z)\leqq c_3/n \text{ и } F(z_n)-c(1)\leqq c_3/n.$$

Из (28) и (29) получаем

$$1\leqq c(1)+1-c(1)\leqq F(z_n)-F(z)+F(z_n)-c(1)+1-c(1)\leqq 3c_3/n,$$

что невозможно для больших n. Это доказывает (24).

Покажем теперь, что K — локально связное множество. Пусть $x\in K$ и $\varepsilon>0$. Из (24) следует: существует $\eta>0$ такое, что $y\in K$, $\rho(x,y)\leqq\eta$ влечет $\rho_r(x,y)\leqq\varepsilon/2$. Если тогда V_y — связное подмножество K, содержащее x и y, для которого $\operatorname{diam}(V_y)\leqq\varepsilon/2$, то образуем множество $V=U_{\rho(x,y)\leqq\eta}V_y$. Легко заметить, что V — связное подмножество K, содержащее x, и $\operatorname{diam}(V)\leqq\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$. При этом V — окрестность для точки x в K. Этим б) доказано.

4. Порядок в теоремах 1 и 2 нельзя улучшить. Точнее, верно следующее

Предложение. *Для любого α, $2>\alpha>1$ в R^2 съществует такой локально связный континуум K, что:*

(30) $$\operatorname{dm}(K)=\alpha.$$

(31) *Выполнено условие* 1.

(32) *Не существует константы c (не зависящей от n), для которой*

а) $$\sup\{E_n(F;S^j):F\in C(K)\}\leqq\omega(F;cn^{-1/\alpha}),\quad n=1,2,\ldots,$$

б) $$\sup\{E_n(F;S):F\in C(K)\}\leqq\omega(F;cn^{-1/\alpha}),\quad n=1,2,\ldots$$

Доказательство. Достаточно построить локально связный континуум K, для которого выполнены (30), (31) и существует натуральное $p\geqq3$, такое, что:

(33) $$M_{1/n}(K)=c_nn^\alpha,\text{ где } 0<c_0\leqq c_n=O(\operatorname{ld}^p n).$$

Прежде всего заметим, что множество K с этими свойствами построено в работе [4]. Строя тогда непрерывную функцию $F_n(x)$ по $M_{1/n}(K)$ точкам $\{z_i\}$ (см. доказательство теорем 3 и 4, где теперь берем $\varepsilon=1$), легко показать, что неравенства а′) $$E_{[n^a]}(F_n; S^j) \leqq \omega(F_n; c'/n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

б′) $$E_{[n^a]}(F_n; S) \leqq \omega(F_n; c'/n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

невозможны для любой константы c'. Действительно, в противном случае, в связном подмножестве $V_1 \subset K$ (соответственно в Δ_{ij}^p) будут содержаться не менее чем $[c_n]$ точек $\{z_i\}$ из n^{-1} — различимого подмножества K. Отсюда так же, как и в доказательствах теорем 3 и 4 приходим к противоречию, используя (33).

Считаю приятным долгом поблагодарить В. А. Попова за постановку рассматриваемой задачи и постоянную поддержку при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах. *Успехи мат. наук*, **14**, 1959, вып. **2** (86), 3 — 86.
2. Бл. Сендов. Аппроксимация относительно хаусдорфового расстояния. Докт. диссертация. Москва, 1967.
3. К. Куратовский. Топология, т. 2. Москва, 1969.
4. Т. П. Боянов, Бл. Сендов. Метрическая размерность и приближения полиномиальными кривыми на плоскости. *Сердика*, **2**, 1976, № **4**, 295—299.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 13. 10. 1976