PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

НЕКОТОРЫЕ ШПЕХТОВЫЕ МНОГООБРАЗИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

ГЕОРГИ К. ГЕНОВ

В статье приводится полное доказательство теоремы о том, что любая ассоциативная алгебра с нильпотентным коммутантом над полем нулевой характеристики имеет конечный базис тождеств.

В настоящей работе рассматриваются ассоциативные алгебры (не обязательно с единицей) над произвольным фиксированным полем K характеристики нуль. Здесь мы приводим полные доказательства результатов, анонсированных в работе [18]. Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 1. *Для любого натурального числа n произведение $\mathfrak{N}_n\mathfrak{A}$ нильпотентного многообразия $\mathfrak{N}_n$ ступени нильпотентности n на многообразие $\mathfrak{A}$ всех коммутативных алгебр является шпехтовым многообразием.*

Эту теорему мы доказываем методом, близким к методу Д. Е. Коэна [13], который был усовершенствован позднее рядом авторов (см., например, [14, 15, 16]).

Заметим, что вопросы о шпехтовости произведения нильпотентного на абелево многообразий для случая групп и алгебр Ли остаются пока открытыми.

Особый интерес представляют следствия из теоремы 1, которые мы приводим в первом параграфе настоящей статьи.

1. Следствия из основной теоремы. Общепринятые обозначения и понятия теории многообразий ассоциативных алгебр мы не будем приводить. Читатель, не знакомый с ними, может найти их в работах [3, 6 или 18].

Напомним, что если $f_1, f_2, \ldots, f_m$ $(m\geqq 2)$ — любые элементы некоторой алгебры A, то через $[f_1, f_2, \ldots, f_m]$ обозначается левонормированный коммутатор длины m от $f_1, f_2, \ldots, f_m$, который определяется индуктивно равенствами $[f_1, f_2]=f_1f_2-f_2f_1$, $[f_1, f_2, \ldots, f_m]=[[f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}], f_m]$ при $m>2$.

Если любое подмногообразие многообразия $\mathfrak{B}$ (включая $\mathfrak{B}$) является конечнобазируемым, то многообразие $\mathfrak{B}$ называется шпехтовым. Ясно, что подмногообразие шпехтового многообразия является шпехтовым. Тривиальными примерами шпехтовых многообразий являются нильпотентное многообразие $\mathfrak{N}_n$, которое определяется тождеством $x_1x_2\ldots x_n=0$ $(n\geqq 1)$ и многообразие $\mathfrak{A}$ всех коммутативных алгебр, определенное тождеством $[x_1, x_2]=0$.

ПЛИСКА Български математически студии. Том. 2, 1981, с. 30—40.

Известными до сих пор примерами шпехтовых многообразий ассоциативных алгебр (без главной единицы) были следующие:

1. [1] Многообразия KD-алгебр, т. е. многообразия $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_n$ $(n \geqq 1)$.

2. [6] Более общий пример, чем пример 1: шпехтовым является любое многообразие с нетривиальным двучленным тождеством.

3. [16] Многообразие, определенное тождеством $[x_1, x_2][x_3, x_4]=0$, т. е. многообразие $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ является шпехтовым.

Легко заметить, что почти все известные до сих пор теоремы о шпехтовости того или иного многообразия получаются как непосредственные следствия из теоремы 1. В частности, приведенные выше примеры шпехтовых многообразий охватываются теоремой като 1, так как они являются подмногообразиями некоторых из многообразий $\mathfrak{N}_n\mathfrak{A}$ $(n \geqq 1)$.

Теперь рассмотрим более важные следствия.

Следствие 1.1. *Каждая конечно-порожденная алгебра A над полем K, в которой выполняется тождество, не выполняющееся в полной матричной алгебре $M(2, K)$ второго порядка, порождает шпехтовое многообразие и, в частности, она является шпехтовой.*

Действительно, по лемме 1 из [5] алгебра A имеет нильпотентный коммутант, т. е. A содержится в некотором из многообразий $\mathfrak{N}_n\mathfrak{A}$. По теореме 1 алгебра A и многообразие $\mathrm{var}(A)$ являются шпехтовыми.

Следствие 1.1 отхватывает широкий класс алгебр. Например, если A — конечно-порожденная алгебра и ассоциированная с ней алгебра Ли A_L разрешима, то A является шпехтовой. Очевидно, это сильно обобщает утверждение из работы [7] о шпехтовости алгебр верхних треугольных матриц.

Следующее утверждение является обобщением следствия 1 из работы [4].

Следствие 1.2. *Многообразие $\mathfrak{L}_2$, определенное тождеством $[x_1, x_2, x_3]=0$, является шпехтовым.*

Доказательство. Легко видеть, что из тождества $[x_1, x_2, x_3]=0$ вытекает тождество $[x_1, x_2][x_3, x_4]=[x_4, x_2][x_1, x_3]$. Но тогда каждый полилинейный полином f от образующих $x_1, \ldots, x_m (m \geqq 2)$, который не содержится в T-идеале многообразия $\mathfrak{L}_2$, по модулю этого идеала записывается в виде $\sum \alpha_k [x_1, x_2] \ldots [x_{2k-1}, x_{2k}] x_{2k+1} \ldots x_m$. Если l — наименьшее число, для которого $\alpha_l \neq 0$, то подставляя в последнюю сумму вместо $x_t (2l+1 \leqq t \leqq m)$ коммутатор, мы получаем, что из тождеств $[x_1, x_2, x_m]=0, f=0$ следует тождество $[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2(m-l)-1}, x_{2(m-l)}]=0$. Следовательно, каждое собственное подмногообразие многообразия $\mathfrak{L}_2$ содержится в некотором из многообразий $\mathfrak{N}_n\mathfrak{A}$. Но тогда из теоремы 1 вытекает, что $\mathfrak{L}_2$ является шпехтовым многообразием. Следствие доказано.

В работе [8] Ю. П. Размыслов доказал, что полная матричная алгебра $M(2, K)$ является шпехтовой, а в работе [9, следствие 2] он получил утверждение о том, что каждое собственное подмногообразие многообразия $\mathrm{var}(M(2, K))$ содержится в некотором из многообразий $\mathfrak{N}_n\mathfrak{A}$. Объединение результатов Ю. П. Размыслова с теоремой 1 дает непосредственно следующее:

Следствие 1.3. *Многообразие $\mathrm{var}(M(2, K))$, порожденное полной матричной алгеброй порядка два над K, является шпехтовым.*

Следствие 1.3 обобщает теорему 3 Ю. П. Размыслова из его работы [10].

Пусть поле F — алгебраически замкнутое и содержит K, а A — алгебра над K размерности не более пяти. Рассмотрим алгебру $B=F \otimes_K A$ над полем F. По теореме Веддерберна [17, теорема 33, с. 127] алгебра B разлагается в полупрямую сумму своего радикала $J(B)$ и полупростой алгебры M. Если M — коммутативная, то B будет расширением нильпотентной алгебры при помощи коммутативной алгебры. Если M — некоммутативна, то по теореме Веддерберна — Артина в M в качестве прямого слагаемого будет участвовать четырехмерная алгебра $M(2, F)$ и, значит, B есть прямая сумма $M(2, F)$ и идеала размерности не более единицы. Теперь рассмотрим B как алгебру над полем K. Поскольку поле K имеет нулевую характеристику, то $\mathrm{var}(A) = \mathrm{var}_K(B)$ и значит многообразие $\mathrm{var}(A)$ либо содержится в некотором из многообразий $\mathfrak{N}_n\mathfrak{A}$, либо совпадает с многообразием $\mathrm{var}_K(M(2, F)) = \mathrm{var}(M(2, K))$. Таким образом, из предшествующих утверждений мы получаем:

Следствие 1.4. *Каждая алгебра размерности не более пяти над полем K порождает шпехтовое многообразие и, в частности, она — шпехтова.*

2. Некоторые частично упорядоченные множества. Для краткости в настоящем пункте понятия частично упорядоченное, вполне упорядоченное и частично хорошо упорядоченное множество будем записывать сокращенно соответственно через ч. у., вп. у. и ч. х. у. множество.

Определение 2.1. *Ч. у. множество $(A, \leqq)$ называется частично хорошо упорядоченным, если в каждом непустом подмножестве B множества A существует конечное подмножество D $(D \subseteq B)$ такое, что для каждого $b \in B$ найдется элемент $d \in D$ со свойством $d \leqq b$.*

Очевидно, любое вп. у. множество является ч. х. у. Далее через J будем обозначать множество всех натуральных чисел, а через J_0 — множество всех неотрицательных целых чисел, т. е. $J_0 = \{0\} \cup J$. Ч. у. множества $(J, \leqq)$ и $(J_0, \leqq)$, где $\leqq$ есть отношение естественной упорядоченности чисел, являются вп. у.

Предложение 2.2 [12, теорема 2. 1]. *Ч. у. множество $(A, \leqq)$ является ч. х. у. тогда и только тогда, когда каждая бесконечная последовательность $a_1, a_2, \ldots$ элементов множества A содержит бесконечную неубывающую подпоследовательность $a_{j_1} \leqq a_{j_2} \leqq \ldots$ $(j_1 < j_2 < \ldots)$.*

Предложение 2.3 [12, теорема 2. 2]. *Пусть $(A, \leqq)$ является ч. х. у. множеством. Если W — непустое подмножество множества A, то $(W, \leqq)$ является ч. х. у.*

Лемма 2.4. *Пусть $(A, \leqq)$ — ч. у. множество, а $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — конечное число непустых подмножеств множества A, объединение которых совпадает с A, т. е. $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Если множества $(A_i, \leqq)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, является ч. х. у., то и множество $(A, \leqq)$ является ч. х. у.*

Утверждение леммы вытекает непосредственно из определения 2.1.

Пусть $(B_1, \leqq), (B_2, \leqq), \ldots, (B_k, \leqq)$ — ч. у. множества, а $C = \Pi_{i=1}^{k} B_i$ — декартово произведение множеств $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Напомним, что декартовым произведением ч. у. множеств $(B_1, \leqq), \ldots, (B_k, \leqq)$ называется ч. у. множество $(C, \leqq)$, где отношение $\leqq$ определяется на C следующим образом: $(b_1, b_2, \ldots, b_k) \leqq (b_1', b_2', \ldots, b_k')$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются $b_1 \leqq b_1'$, $b_2 \leqq b_2'$, $\ldots$, $b_k \leqq b_k'$.

Предложение 2.5 [12, теорема 2. 3]. *Декартово произведение конечного числа ч. х. у. множеств является ч. х. у. множеством.*

Через Φ будем обозначать множество всех инъективных отображений множества J_0 всех неотрицательных целых чисел в себя, которые сохраняют естественную упорядоченность чисел. Через ε будем обозначать тождественное отображение множества J_0. Очевидно, ε содержится в Φ.

Пусть $(A, \leqq)$ — любое ч. у. множество. Обозначим через $\widetilde{A}$ множество всех конечных последовательностей элементов множества A. В множестве $\widetilde{A}$ определяем отношение $\leqq$ следующим образом: $(a_1, a_2, \ldots, a_l) \leqq (a_1', a_2', \ldots, a_m')$ тогда и только тогда, когда существует $\varphi \in \Phi$ такое, что $\varphi(l) \leqq m$ и $a_i \leqq a'_{\varphi(i)}$, $i=1, 2, \ldots, l$. Легко видеть, что $(\widetilde{A}, \leqq)$ является ч. у. множеством.

Теорема 2.6 [12, теорема 4.3]. *Если множество $(A, \leqq)$ является ч. х. у., то таким же будет и множество $(\widetilde{A}, \leqq)$.*

Пусть k — фиксированное натуральное число, а $(A, \leqq)$ — любое ч. у. множество. Обозначим через $\widehat{A}[k]$ множество всех последовательностей вида $(i_1, i_2, \ldots, i_k;\ a_1, a_2, \ldots, a_l)$, где $i_r \in J$, $r=1, 2, \ldots, k$, а $(a_1, a_2, \ldots, a_l)$ — конечная последовательность (возможно и пустая) из элементов множества A. Мы определяем отношение $\leqq$ в множестве $\widehat{A}[k]$ следующим образом: если $s=(i_1, i_2, \ldots, i_k;\ a_1, a_2, \ldots, a_l)$ и $t=(i_1', i_2', \ldots, i_k';\ a_1', a_2', \ldots, a_m')$, то $s \leqq t$ тогда и только тогда, когда существует такое φ в Φ, что $\varphi(i_j)=i_j'$, $j=1, 2, \ldots, k$, $\varphi(l) \leqq m$ и $a_r \leqq a'_{\varphi(r)}$, $r=1, 2, \ldots, m$.

Предложение 2.7 [15, лемма 1]. *Если $(A, \leqq)$ является ч. х. у. множеством, то для любого натурального числа K множество $(\widehat{A}[k], \leqq)$ является ч. х. у.*

Пусть H — множество всех бесконечных последовательностей из неотрицательных целых чисел с конечным носителем. Если $\alpha \in H$, то через $\alpha(r)$ $(r=1, 2, \ldots)$ будем обозначать r-тый член последовательности α. Через ω будем обозначать последовательность с пустым носителем, т. е. ω — последовательность только из нулей. Ясно, что $\omega \in H$. Если $\alpha \neq \omega$, то через m_α будем обозначать минимальное натуральное число, содержащееся в носителе α, т. е. $\alpha(m_\alpha) \neq 0$ и $\alpha(r)=0$ при $r<m_\alpha$. Положим еще $m_\omega=0$. Далее часто используется равносильность равенств $m_\beta=0$ и $\beta=\omega$.

Пусть k и d — любые натуральные числа, а l — любое неотрицательное целое число. Обозначим через $H[k, l, d]$ множество всех последовательностей вида $(i_1, i_2, \ldots, i_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_{l+d})$, где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — натуральные числа, а α_j — элементы множества H, $j=1, \ldots, l+d$. В множестве $H[k, l, d]$ вводим отношение $\leqq$ следующим образом: если $s=(i_1, \ldots, i_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_{l+d})$ и $t=(i_1', \ldots, i_k';\ \alpha_1', \ldots, \alpha_{l+d}')$, то $s \leqq t$ тогда и только тогда, когда существует φ в Φ такое, что $\varphi(i_j)=i_j'$ $(j=1, \ldots, k)$, $\varphi(m_{\alpha_s})=m_{\alpha'_s}$ $(s=1, \ldots, l)$, $\alpha_r(\lambda) \leqq \alpha_r'(\varphi(\lambda))$, $\lambda=1, 2, \ldots, r=1, \ldots, l+d$.

Легко проверяется, что $(H[k, l, d], \leqq)$ является ч. у. множеством.

Если τ — любое подмножество множества $\{1, 2, \ldots, l\}$, то через $H^\tau[k, l, d]$ обозначим множество всех элементов $(i_1, \ldots, i_k;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_{l+d})$ множества $H[k, l, d]$, для которых $\alpha_j \neq \omega$ в том и только в том случае, когда $j \in \tau$ $(1 \leqq j \leqq l)$. Заметим, что в этом определении на $\alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_{l+d}$ никаких ограничений не накладываются. Очевидно, выполняется равенство

$$H[k, l, d]=\bigcup_\tau H^\tau[k, l, d], \tag{1}$$

где объединение берется по всем подмножествам τ множества $\{1, 2, \ldots, l\}$.

Лемма 2.8. *Для любого подмножества τ множества $\{1, 2, \ldots, l\}$ ч. у. множество $(H^{\tau}[k, l, d], \leqq)$ является ч. х. у.*

Доказательство. Пусть $q=|\tau|$ и $\tau=\{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$, $1 \leqq j_1 < j_2 < \ldots, < j_q \leqq l$, а $(C, \leqq)$ есть $(l+d)$-тая декартова степень вп. у. множества $(J_0, \leqq)$. По предложению 2.7 $(\widehat{C}[k+q], \leqq)$ является ч. х. у. множеством и поэтому по предложению 2.3 каждое подмножество этого множества тоже будет ч. х. у. Следовательно, для доказательства леммы достаточно показать, что $(H^{\tau}[k, l, d], \leqq)$ изоморфно ч. у. подмножеству множества $(\widehat{C}[k+q], \leqq)$.

Пусть W — подмножество множества $\widehat{C}[k+q]$, которое состоит из всех последовательностей $w=(i_1, \ldots, i_{k+q};\ t_1, \ldots, t_p)$ со следующими свойствами: $i_{k+r}=\min\{\lambda \mid t_{j_r}(\lambda)\neq 0,\ 1 \leqq \lambda \leqq l+d\}$, $r=1, \ldots, q$, а $t_i(\lambda)=0$ при $i \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_q\} = \tau$ и $\lambda=1, 2, \ldots, l+d$.

Мы определяем отображение $\theta: H^{\tau}[k, l, d] \to W$ следующим образом: если $s=(i_1, i_2, \ldots, i_k;\ a_1, \ldots, a_{l+d})$, то $s\theta=(i_1, \ldots, i_k,\ m_{a_{j_1}}, \ldots, m_{a_{j_q}};\ t_1, \ldots, t_{\lambda_0})$, где $t_\lambda=(a_1(\lambda), a_2(\lambda), \ldots, a_{l+d}(\lambda))$, $\lambda=1, 2, \ldots, \lambda_0$, а λ_0 — минимальное натуральное число такое, что при $\mu > \lambda_0$ имеем $a_i(\mu)=0$, $i=1, 2, \ldots, l+d$.

Теперь нетрудно проверить, что θ есть изоморфизм ч. у. множеств $(H^{\tau}[k, l, d], \leqq)$ и $(W, \leqq)$. Лемма доказана.

Теорема 2.9. *Множество $(H[k, l, d], \leqq)$* является ч. х. у.

Теорема получается из утверждения леммы 2.4, так как равенство (1) и лемма 2.8 показывают, что условия леммы 2.4 выполнены.

Определение 2.10. *Элемент $s=(i_1, i_2, \ldots, i_k;\ a_1, \ldots, a_{l+d})$ множества $H[k, l, d]$ будем называть полилинейным, если выполняются следующие условия:* (i) *числа $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — попарно различные*; (ii) *последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{l+d}$ состоят только из нулей и единиц и их носители попарно не пересекаются*; (iii) *выполняются равенства $a_r(i_j)=0$ при $j=1, 2, \ldots, k$ и $r=1, 2, \ldots, l+d$. Через $T[k, l, d]$ будем обозначать подмножество из всех полилинейных элементов множества $H[k, l, d]$.*

Из теоремы 2.9 и из предложения 2.3 получается следующее:

Следствие 2.11. *Ч. у. множество $(T[k, l, d], \leqq)$ является ч. х. у.*

3. Доказательство основной теоремы 1. Хорошо известно, а и легко доказывается, что произведение $\mathfrak{N}_{n+1}\mathfrak{A}(n \geqq 0)$ нильпотентного многообразия $\mathfrak{N}_{n+1}$ на многообразие $\mathfrak{A}$ всех коммутативных алгебр является многообразием, которое определяется тождеством $[x_1, x_2].[x_3, x_4]\ldots[x_{2n+1}, x_{2n+2}]=0$.

Пусть F — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{N}_{n+1}\mathfrak{A}$ со свободными образующими $x_1, x_2, \ldots$ Через F' обозначим коммутант алгебры F, т. е. F' есть идеал алгебры F, порожденный всевозможными коммутаторами элементов из F.

Определение 3.1. *Левонормированный коммутатор $[y_1, y_2, \ldots, y_m]$ длины $m \geqq 2$, где y_i — некоторые из свободных образующих (не обезательно различных) алгебры F, называется специальным коммутатором веса m.*

Далее мы часто будем использовать тождество Якоби $[x, y, z]+[y, z, x]+[z, x, y]=0$ и следующие два тождества:

$$[xy, z]=x[y, z]+[x, z]y,\quad [x, yz]=[x, y]z+y[x, z], \tag{2}$$

которые выполняются в каждой ассоциативной алгебре.

Следующие четыре леммы доказываются с помощью указанных трех тождеств и простой индукцией. Поэтому мы не приводим их доказательства.

Лемма 3.2. *Если $a, b_1, b_2, \dots, b_r$ — любые элементы алгебры F, то элемент $b_1 b_2 \dots b_r a$ записывается в виде линейной комбинации элементов вида $[a, z_1, z_2, \dots, z_i] z_{i+1} \dots z_r$, где $i \geq 0$, а множество $\{z_1, z_2, \dots, z_r\}$ совпадает с множеством $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$.*

Лемма 3.3. *Если $f_1, f_2, \dots, f_r$ $(r \geq 3)$ — некоторые элементы алгебры F, а σ — любая перестановка чисел $3, \dots, r$, то коммутатор $u = [f_1, f_2, f_3, \dots, f_r]$ совпадает по модулю идеала $(F')^2$ с коммутатором $v = [f_1, f_2, f_{\sigma(3)}, \dots, f_{\sigma(r)}]$, т. е. $u - v \in (F')^2$.*

Лемма 3.4. *Если $f_1, f_2, \dots, f_m$ $(m \geq 2)$ — любые элементы алгебры F и для некоторого i, $1 \leq i \leq m$, выполняется равенство $f_i = ab$ $(a, b \in F)$, то по модулю идеала $(F')^2$ коммутатор $u = [f_1, \dots, f_i, \dots, f_m]$ совпадает с элементом $v = [f_1, \dots, f_{i-1}, a, f_{i+1}, \dots, f_m] b + [f_1, \dots, f_{i-1}, b, f_{i+1}, \dots, f_m] a - [f_1, \dots, f_{i-1}, b, f_{i+1}, \dots, f_m, a]$, т. е. $u - v \in (F')^2$.*

Лемма 3.5. *Если u и v — два одночлена от свободных образующих алгебры F, то коммутатор $[u, v]$ является линейной комбинацией элементов вида av, где a — специальный коммутатор веса не меньше 2, а v — одночлен, может быть и пустой.*

Лемма 3.6. *T-идеал $(F')^n$ алгебры F, который порождается как T-идеал элементом $w_n = [x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$, является линейной оболочкой элементов вида $a_1 a_2 \dots a_n v$, где a_i — специальные коммутаторы веса не меньше 2, а v — одночлен (может быть и пустой) от свободных образующих.*

Доказательство. Так как полином w_n — полилинейный, то T-идеал $(F')^n$ является линейной оболочкой элементов вида $b_0[u_1, u_2] b_1 [u_3, u_4] \dots b_n [u_{2n-1}, u_{2n}] . b_{n+1}$, где $u_1, u_2, \dots, u_{2n}$ — непустые одночлены, а b_i — одночлены, быть может и пустые. По лемме 3.5 каждый такой элемент есть линейная комбинация элементов вида $v_0 c_1 v_1 c_2 \dots v_n c_n v_{n+1}$, где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — специальные коммутаторы, а $v_0, v_1, \dots, v_{n+1}$ — одночлены. Теперь, применяя лемму 3.2 и индукцию, мы получаем утверждение леммы.

Следствие 3.7. *Если g — любой полилинейный полином в алгебре F, который содержится в T-идеале $(F')^n$, то g является линейной комбинацией полилинейных форм вида $a_1 a_2 \dots a_n v$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — специальные полилинейные коммутаторы, а v — одночлен, может быть и пустой.*

Предложение 3.8. *Путь $f_1, f_2, \dots, f_n$ — любые элементы, содержащиеся в коммутанте F' алгебры F, $v = y_1 y_2 \dots y_r$, где y_i — произвольные элементы алгебры F, а $q = f_1 f_2 \dots f_n v$. Если для некоторого i $(1 \leq i \leq n)$ имеем $f_i = [z_1, z_2, z_3, \dots, z_l]$, $l \geq 3$, $z_j \in F$, а σ и π — любые перестановки чисел $3, 4, \dots, l$ и $1, 2, \dots, r$, соответственно, то выполняется равенство $q = f_1 \dots f_{i-1} g f_{i+1} \dots f_n w$, где $g = [z_1, z_2, z_{\sigma(3)}, \dots, z_{\sigma(l)}]$, $w = y_{\pi(1)} y_{\pi(2)} \dots y_{\pi(r)}$.*

Доказательство. По лемме 3.3 мы имеем $f_i = g + h$, где $h \in (F')^2$. Кроме того, выполняется очевидное равенство $v = w + d$, где $d \in F'$. Так как $(F')^{n+1} = 0$, то мы получаем $q = f_1 \dots f_{i-1} g f_{i+1} \dots f_n v + f_1 \dots f_{i-1} h f_{i+1} \dots f_n v = f_1 \dots f_{i-1} g f_{i+1} \dots f_n w + f_1 \dots f_{i-1} g f_{i+1} \dots f_n d = f_1 \dots f_{i-1} g f_{i+1} \dots f_n w$.

Предложение доказано.

Далее через $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ будем обозначать конечные подмножества множества J натуральных чисел. Характеристическую функцию подмножества α будем обозначать той же буквой α. Характеристическую функцию α можно рассматривать как последовательность из нулей и единиц. Таким образом, конечное подмножество множества J, его характеристическую функцию и соответствующую последовательность из нулей и единиц му будем отождествлять и обозначать одним и тем же знаком. Через ω будем обозначать пустое подмножество множества J.

Через $[x_i, x_j, Y_\omega]$ будем обозначать коммутатор $[x_i, x_j]$, а если $\alpha \neq \omega$, $\alpha = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$, где $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$, то через $[x_i, x_j, Y_\alpha]$ мы будем обозначать специальный коммутатор $[x_i, x_j, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}]$.

Через Z_ω будем обозначать пустое слово (по умножению действующее в F как тождественное преобразование), а через Z_α — произведение $x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_r}$, если $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ и $\alpha = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$.

Следствие 3.9. *Пусть g — любой полилинейный полином от образующих $x_{\nu}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_r}$ в алгебре F, который содержится в T-идеале $(F')^n$. Тогда g представляется в виде линейной комбинации полилинейных элементов вида*

$$(3) \qquad [x_{i_1}, x_{i_2}, Y_{\alpha_1}]\,[x_{i_3}, x_{i_4}, Y_{i_2}] \ldots [x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}}, Y_{\alpha_n}]\, Z_{\alpha_{n+1}},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ — конечные подмножества множества натуральных чисел J и выполняется равенство $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r\} = \{\dot{\nu}_1, \dot{\nu}_2, \ldots, \dot{\nu}_{2n}\} \cup \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \ldots \cup \alpha_{n+1}$.

Утверждение следствия получается непосредственно из следствия 3.7.

Через Π будем обозначать множество всех полилинейных форм вида (3), через $P_k (k \geqq 2n)$ — множество всех форм из Π степени k от образующих $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Ясно, что для каждого $k \geqq 2n$ множество P_k содержит конечное число элементов. Положим $P = \cup_{k=2n}^{\infty} P_k$.

Определение 3.10. *Если α — любое конечное подмножество множества J, то через m_α будем обозначать минимальное число, содержащееся в α. Если $\alpha = \omega$, то $m_\alpha = 0$ по определению.*

Заметим, что если рассмотрим α как последовательность из нулей и единиц, то m_α есть минимальное число, содержащееся в носителе последовательности α (см. п. 2).

Если $\varphi \in \Phi$, то через φ^* будем обозначать эндоморфизм алгебры F, определенный равенствами $x_i \varphi^* = x_{\varphi(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Определение 3.11. *Пусть s и t содержатся в множестве Π,*

$$s = [x_{i_1}, x_{i_2}, Y_{\alpha_1}] \ldots [x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}}, Y_{\alpha_n}]\, Z_{\alpha_{n+1}},$$
$$t = [x_{j_1}, x_{j_2}, Y_{\beta_1}] \ldots [x_{j_{2n-1}}, x_{j_{2n}}, Y_{\beta_n}]\, Z_{\beta_{n+1}}.$$

Будем говорить, что s меньше t относительно упорядоченности $\leqq \Phi$, и записывать $s \leqq_\Phi t$ тогда и только тогда, когда существует $\varphi \in \Phi$ такое, что $s\varphi^* = [x_{j_1}, x_{j_2}, Y_{\tau_1}] \ldots [x_{j_{2n-1}}, x_{j_{2n}}, Y_{\tau_n}] Z_{\tau_{n+1}}$, где $\varphi(\alpha_i) = \tau_i \subseteq \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, а $m_{\tau_\nu} = m_{\beta_\nu}$, $\nu = 1, \ldots, n$.

Заметим, что при $s \leqq_\Phi t$ равенство $\alpha_\nu = \omega$ для некоторого ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ равносильно равенству $\beta_\nu = \omega$.

Легко проверить, что множество $(\Pi, \leqq \Phi)$ является частично упорядоченным. Важным для дальнейшего будет следующее предложение.

Предложение 3.12. *Множество $(\Pi, \leqq \Phi)$ является частично хорошо упорядоченным.*

Доказательство предложения легко получается из результатов предшествующего параграфа. Действительно, изоморфизм ч. у. множеств $(\Pi, \leqq \Phi)$

и $(T[n, n, 1], \leqq)$ (см. определение 2.10) строится очевидным образом. Но по следствию 2.11 последнее множество является ч. х. упорядоченным и поэтому таким же будет и множество $(\Pi, \leqq\Phi)$.

Определение 3.13. *Пусть x_j участвует в записи полилинейного полинома* $s=[x_{i_1}, x_{i_2}, Y_{\alpha_1}][x_{i_3}, x_{i_4}, Y_{\alpha_2}]\ldots[x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}}, Y_{\alpha_n}]Z_{\alpha_{n+1}}$. *Будем говорить, что x_j встречается на k-том месте в s $(1\leqq k\leqq 3n+1)$, если $j=i_k$ при $1\leqq k\leqq 2n$ или $j\in\alpha_{k-2n}$, когда $2n<k\leqq 3n+1$.*

Теперь мы введем еще один частичный порядок в множестве Π, который будем обозначать через $\leqq$.

Определение 3.14. *Пусть s и t — две различные полилинейные формы из Π. Будем считать, что $s<t$ только в следующих двух случаях:*

a) $\deg s<\deg t$,

b) $\deg s=\deg t=m$, *в s и t участвуют одни и те же образующие $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ $(j_1<j_2<\cdots<j_m)$ и существует такое l, $1\leqq l\leqq m$, что $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{l-1}}$ встречаются на одних и тех же местах в s и t, но x_{j_l} встречается в t на месте с меньшим номером (встречается в t „раньше"), чем в s.*

Легко видеть, что множество $(\Pi, \leqq)$ является частично упорядоченным. Кроме того, на каждом подмножестве множества Π составленное из полилинейных форм от одних и тех же образующих отношение $\leqq$ индуцирует линейный порядок. В частности, множества $(P_k, \leqq)$ являются линейно упорядоченными $(k\geqq 2n)$. Так как полиномы большей степени больше, чем полиномы меньшей степени, то имеет место следующее предложение относительно множества $P=\bigcup_{k=2n}^{\infty}P_k$.

Предложение 3.15. *Множество $(P, \leqq)$ является вполне упорядоченным.*

Если g — ненулевой полилинейный полином алгебры F, содержащийся в $(F')^n$, то

(4) $$g=\lambda_1 s_1+\lambda_2 s_2+\cdots+\lambda_p s_p,$$

где $0\neq\lambda_i\in K$, а s_i — различные элементы множества Π от одних и тех же образующих. Поэтому $s_1, s_2, \ldots, s_p$ линейно упорядоченны относительно порядка $\leqq$. Наибольший из них мы будем обозначать через $wt(g)$ и называть весом представления (4) элемента g.

Лемма 3.16. *Пусть s и t — два элемента множества Π, а φ — любой элемент из Φ. Тогда, если $s<t$, то $s\varphi^*<t\varphi^*$.*

Доказательство. Пусть $\deg s<\deg t$. Так как φ^* сохраняет степень полиномов, то $\deg(s\varphi^*)<\deg(t\varphi^*)$ и поэтому $s\varphi^*<t\varphi^*$.

Пусть $\deg s=\deg t=m$. Так как $s<t$, то в s и t участвуют одни и те же образующие $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ $(j_1<j_2<\cdots<j_m)$ и существует такое l, $1\leqq l\leqq m$, что $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{l-1}}$ участвуют одинаковым образом в s и t, но x_{j_l}) встречается раньше в t, чем в s. Элементы $s\varphi^*$ и $t\varphi^*$ получаются из s и t заменой $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ соответственно на $x_{\varphi(j_1)}, x_{\varphi(j_2)}, \ldots, x_{\varphi(j_m)}$. Но $\varphi(j_1)<\varphi(j_2)<\cdots<\varphi(j_m)$ и $x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(j_{l-1})}$ встречаются одинаковым образом в $s\varphi^*$ и $t\varphi^*$, но $x_{\varphi(j_l)}$ встречается раньше в $t\varphi^*$, чем в $s\varphi^*$. Следовательно, выполняется отношение $s\varphi^*<t\varphi^*$.

Следствие 3.17. *Если g — любой полилинейный полином идеала $(F')^n$, а φ — элемент из Φ, то $wt(g\varphi^*)=(wt(g))\varphi^*$.*

Лемма 3.18. *Пусть $s<t$, $s, t\in\Pi$, образующая x_c не участвует в записи полиномов s и t. Тогда sx_c и tx_c содержатся в Π и $sx_c<tx_c$.*

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой.

Пусть m и c — натуральные числа, $m<c$, а $\psi_{m,c}$ — эндоморфизм алгебры F, определенный равенствами $x_m\psi_{m,c}=x_c x_m$, $x_j\psi_{m,c}=x_j$ при $j\neq m$.

Лемма 3.19. *Пусть s — любой элемент множества Π, x_c не участвует в записи полинома s, а x_m участвует в s на k-том месте, причем $m<c$. Если*

$$s=[x_{i_1},\ x_{i_2},\ Y_{\alpha_1}]\,[x_{i_3},\ x_{i_4},\ Y_{\alpha_2}]\ldots[x_{i_{2n-1}},\ x_{i_{2n}},\ Y_{\alpha_n}]Z_{\alpha_{n+1}},$$

то вес $wt(s\psi_{m,c})$ полинома $s\psi_{m,c}$ равен элементу

$$t=[x_{i_1},\ x_{i_2},\ Y_{\beta_1}]\,[x_{i_3},\ x_{i_4},\ Y_{\beta_2}]\ldots[x_{i_{2n-1}},\ x_{i_{2n}},\ Y_{\beta_n}]\,Z_{\beta_{n+1}},$$

где $\beta_k=\alpha_k\cup\{c\}$, $\beta_i=\alpha_i\ (i\neq k)$ при $1\leqq k\leqq 2n$, и $\beta_{k-2n}=\alpha_{k-2n}\cup\{c\}$, $\beta_i=\alpha_i(t\neq k-2n)$ при $2n<k\leqq 3n+1$.

Доказательство. Если $k=3n+1$, то x_m участвует в $Z_{\alpha_{n+1}}$ и в этом случае, очевидно, $s\psi_{m,c}=t$.

Пусть $k<3n+1$ и $a_l=[x_{i_{2l-1}},\ x_{i_{2l}},\ Y_{\alpha_l}]$, $l=1,\ 2,\ldots,n$. Тогда $s=a_1 a_2\ldots a_n Z_{\alpha_{n+1}}$ и x_m участвует в a_p, где $p=(k+1)/2$, когда k — нечетное и $1\leqq k\leqq 2n$; $p=k/2$, когда k—четное и $1\leqq k\leqq 2n$; $p=k-2n$, когда $2n<k\leqq 3n$. Мы имеем $s\psi_{m,c}=a_1\ldots a_{p-1}(a_p\psi_{m,c})\,a_{p+1}\ldots a_n Z_{\alpha_{n+1}}$. По лемме 3.4 выполняется

$$a_p\psi_{m,c}=a_p x_c+b_p x_m-[a_p,\ x_c]\ (\mathrm{mod}\ (F')^2),$$

где b_p получается из a_p заменой x_m на x_c. Поэтому в F выполняется равенство $s\psi_{m,c}=-t+a_1\ldots a_p x_c a_{p+1}\ldots a_n Z_{\alpha_{n+1}}+a_1\ldots a_{p-1}b_p x_m a_{p+1}\ldots a_n Z_{\alpha_{n+1}}$. Теперь уже нетрудно видеть, что элемент t больше весов остальных двух слагаемых в последнем равенстве. Лемма доказана.

Лемма 3.20. *Пусть s_1 и s_2 — два элемента множества Π, $s_1<s_2$ и $\deg s_1=\deg s_2$. Если x_c не участвует в записи s_1 (значит и в s_2), x_m участвует в записи s_1 и $c>m$, то вес полинома $s_1\psi_{m,c}$ меньше веса полинома $s_2\psi_{m,c}$, т. е. $wt(s_1\psi_{m,c})<wt(s_2\psi_{m,c})$.*

По лемме 3.19 веса полиномов $s_1\psi_{m,c}$ и $s_2\psi_{m,c}$ выражаются явно через s_1 и s_2. Поэтому сравнить их и установить, что $wt(s_1\psi_{m,c})<wt(s_2\psi_{m,c})$ не представляет никаких трудностей.

Следствие 3.21. *Пусть g — любой полилинейный полином, содержащийся в $(F')^n$. Если x_m участвует в записи g, а x_c не участвует в записи g и $m<c$, то выполняется равенство $wt(g\psi_{m,c})=wt(wt(g)\psi_{m,c})$.*

Лемма 3.22. *Пусть s и t — два элемента множества Π, которые находятся в отношении $s\leqq_\Phi t$, а φ — тот элемент множества Φ, который доказывает верность этого отношения. Тогда $s\varphi^*\leqq_\Phi t$ и верность этого отношения доказывается тождественным отображением ε из Φ. Если все образующие, участвующие в s, участвуют и в t, то $s\leqq t$.*

Доказательство леммы вытекает непосредственно из определений упорядоченностей $\leqq_\Phi$ и $\leqq$. Поэтому мы не будем его приводить.

Лемма 3.23. *Пусть g — произвольный полилинейный полином, содержащийся в T-идеале $(F')^n$, а $s=wt(g)$. Пусть t — такой элемент множества Π, что выполняется отношение $s\leqq_\Phi t$. Тогда в T-идеале $\{g\}_T$, порожденном полиномом g, содержится полилинейный полином h, вес которого $wt(h)$ равен t.*

Доказательство. Пусть φ — элемент множества Φ, который доказывает верность отношения $s\leqq_\Phi t$. По лемме 3.22 мы имеем $s\varphi^*\leqq_\Phi t$, а по следствию 3.17 выполняется равенство $s\varphi^* = wt(g\varphi^*)$. С другой стороны, полином $g\varphi^*$ содержится в T-идеале $\{g\}_T$ (даже порождает его). Следовательно, мы можем считать, что отношение $s \leq_\Phi t$ доказывается тождественным отображением ε из Φ, т. е. s и t имеют следующий вид:

$$s = [x_{i_1}, x_{i_2}, Y_{\alpha_1}] \ldots [x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}}, Y_{\alpha_n}] Z_{\alpha_{n+1}},$$
$$t = [x_{i_1}, x_{i_2}, Y_{\beta_1}] \ldots [x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}}, Y_{\beta_n}] Z_{\beta_{n+1}},$$

где $m_{\alpha_i} = m_{\beta_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha_j \subseteq \beta_j$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$.

В силу леммы 3.18, мы можем считать, что $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$. Далее мы проведем индукцию по числу $d = \sum_{i=1}^{n}(|\beta_i| - |\alpha_i|)$. Ясно, что $d \geq 0$. Если $d = 0$, то мы имеем $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Поэтому $s = t$, и мы можем положить $h = g$.

Пусть $d > 0$ и для чисел меньших d лемма уже доказана. Тогда существует такое β_j, которое не совпадает с α_j, т. е. существует $c \in \beta_j$, но $c \notin \alpha_j$. Так как $m_{\alpha_j} = m_{\beta_j}$, то $c > m = m_{\alpha_j}$. По следствию 3.21, мы имеем $wt(g\psi_{m,c}) = wt(s\psi_{m,c})$, а по лемме 3.19 выполняется равенство

$$wt(s\psi_{m,c}) = [x_{i_1}, x_{i_2}, Y_{\gamma_1}] \ldots [x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}}, Y_{\gamma_n}] Z_{\gamma_{n+1}},$$

где $\gamma_i = \alpha_i$ при $i \neq j$, $1 \leq i \leq n+1$, а $\gamma_j = \alpha_j \cup \{c\}$.

Очевидно, тождественное отображение $\varepsilon \in \Phi$ доказывает верность отношения $wt(s\psi_{m,c}) \leq_\Phi t$. Кроме того, выполняется равенство

$$d - 1 = \sum_{i=1}^{n}(|\beta_i| - |\gamma_i|),$$

а полином $g\psi_{m,c}$ содержится в T-идеале $\{g\}_T$. Следовательно, мы можем применить индуктивное предположение и заключить, что существует полилинейный полином h в T-идеале $\{g\psi_{m,c}\}_T \subseteq \{g\}_T$ с весом t. Лемма доказана.

Следующее утверждение является хорошо известным (см., например, [14], лемма 2.1).

Предложение 3.24. *Пусть многообразие $\mathfrak{B}$ является шпехтовым и содержится в многообразии $\mathfrak{M}$. Если известно, что каждое подмногообразие $\mathfrak{N}$ многообразия $\mathfrak{M}$, которое содержит $\mathfrak{B}$, является конечнобазируемым, то многообразие $\mathfrak{M}$ — шпехтово.*

Доказательство теоремы 1. Шпехтовость многообразия $\mathfrak{N}_m\mathfrak{A}$ ($m \geq 1$) мы докажем индукцией по числу m. Если $m = 1$, то $\mathfrak{N}_1$ есть тривиальное многообразие, содержащее только нулевую алгебру, а $\mathfrak{N}_1\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ есть шпехтовое многообразие.

Допустим, что мы уже доказали шпехтовость многообразия $\mathfrak{N}_n\mathfrak{A}$. Мы знаем, что многообразие $\mathfrak{N}_{n+1}\mathfrak{A}$ является конечнобазируемым. Пусть $\mathfrak{B}$ — любое подмногообразие многообразия $\mathfrak{N}_{n+1}\mathfrak{A}$, которое содержит подмногообразие $\mathfrak{N}_n\mathfrak{A}$. Многообразию $\mathfrak{B}$ соответствует T-идеал V свободной алгебры F многообразия $\mathfrak{N}_{n+1}\mathfrak{A}$, который содержится в $(F')^n$, так как $\mathfrak{N}_n\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Если мы докажем, что V имеет конечное число образующих как T-идеал алгебры F, то эти образующие вместе с тождеством $[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2n+1}, x_{2n+2}] = 0$ будут определять многообразие $\mathfrak{B}$, т. е. $\mathfrak{B}$ будет конечнобазируемым.

Через W обозначим множество полилинейных полиномов w со следующими свойствами: (i) $w \in V$, (ii) если $\deg w = r$, то в w участвуют образующие $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Так как поле K имеет характеристику нуль, то V порождается множеством W как T-идеал. Пусть S — множество всех весов полиномов из W. Тогда S является подмножеством множества P. Множество $(P, \leq_\Phi)$ является частично хорошо упорядоченным и поэтому в S существует конечное подмножесвто $S_0=\{s_1, s_2, \ldots, s_p\}$ такое, что для каждого $s \in S$ найдется i, $1\leq i \leq P$, что $s_i \leq_\Phi s$. Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_p \in W$, $wt(h_i)=s_i$, $i=1, \ldots, p$. Рассмотрим T-идеал $\{h_1, h_2, \ldots, h_p\}_T=U$, порожденный конечным множеством полиномов $h_1, h_2, \ldots, h_p$. Ясно, что U содержится в V. Мы покажем, что множество W содержится в U.

Пусть $h \in W$ и $wt(h)=t$. Существует i $(1\leq i\leq p)$ такое, что $s_i\leq_\Phi t$. По лемме 3.23 в T-идеале $\{h_i\}_T$ найдется полином g с весом $wt(g)=t$. Полином g содержится в U, так как $\{h_i\}\subseteq U$ и для некоторого $\lambda \in K$ мы имеем $wt(h-\lambda g)<wt(h)=t$. Так как $(S, \leq)$ есть вполне упорядоченное множество, то мы можем применить индукцию и заключить, что $h \in U$. Следовательно, выполняется равенство $V=U=\{h_1, \ldots, h_p\}_T$, и мы доказали, что многообразие $\mathfrak{B}$ является конечнобазируемым. По предложению 3.24 многообразие $\mathfrak{N}_{n+1}\mathfrak{B}$ яляется шпехтовым. Этим индукция завершается и основная тоорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Б. Гаврилов. О многообразиях ассоциативных алгебр. *Доклады БАН*, **21**, 1968, 989—992.
2. М. Б. Гаврилов. О некоторых T-идеалах в свободной ассоциативной алгебре. *Алгебра и логика*, 8, 1969, 172—175.
3. М. Б. Гаврилов, Л. И. Давидов, И. К. Тонов. Няколко бележки върху PI-алгебрите. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*, **64**, 1969/1970, 277—292.
4. В. Н. Латышев. Об алгебрах с тождественными соотношениями. *Доклады АН СССР*, **146**, 1962, 1003—1006.
5. В. Н. Латышев. Обобщение теоремы Гильберта о конечности базисов. *Сиб. мат. ж.*, **7**, 1966, 1422—1424.
6. В. Н. Латышев. О некоторых многообразиях ассоциативных алгебр. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **37**, 1973, 1010—1037.
7. Ю. Н. Мальцев. Базис тождеств алгебры верхних треугольных матриц. *Алгебра и логика*, **10**, 1971, 393—401.
8. Ю. П. Размыслов. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль. *Алгебра и логика*, **12**, 1973, 83—113.
9. Ю. П. Размыслов. О радикале Джекобсона в PI-алгебрах. *Алгебра и логика*, **13**, 1974, 337—360.
10. Ю. П. Размыслов. Конечная базируемость некоторых многообразий алгебр. *Алгебра и логика*, 13, 1974, 685—693.
11. W. Specht. Gezetze in Ringen. *Math. Z.*, **52**, 1950, 557—589.
12. G. Higman. Ordering by divisibility in abstract algebras. *Proc. London Math. Soc*, **2**, 1952, 326—336.
13. D. E. Cohen. On the laws of a metabelian variety. *J. Algebra*, **5**, 1967, 267—273.
14. M. R. Vaughan-Lee. Abelian by nilpotent varieties. *Quart. J. Math. Oxford*, **21**, 1970, 193—202.
15. R. M. Bryant, M. R. Vaughan-Lie. Soluble varieties of Lie algebras. *Quart. J. Math Oxford*, **23**, 1972, 107—112.
16. J. Lewin. A matrix representation for associative algebras I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **188**, 1974, 293—308.
17. I. Kaplansky. Fields and rings, Chicago, 1972.
18. Г. К. Генов. О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 937—941.

Единый центр математаки и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 2. 6. 1976