PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛУОДНОРОДНО ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ НЕРАВЕНСТВАМИ

СТОЯНА Д. ЖЕЛЕВА

Здесь доказывается, что каждая полуоднородно частично упорядоченная (п. ч. у.) группа обладает представлением образующими элементами и определяющими неравенствами. Указываются достаточные условия, при которых одна п. ч. у. группа является слабо монотонно гомоморфным образом и соответственно монотонно гомоморфным образом другой п. ч. у. группы, и необходимое и достаточное условие для разрешимости проблемы неравенства в подходящем и всегда построимом представлении данной п. ч. у. группы.

Группа G есть полуоднородно частично упорядочена, если G — частично упорядоченное множество и каждый элемент $x \in G$ удовлетворяет одному и только одному из двух условий:

А. $xa > xb$, $ax > bx$ для любого $a > b$;

Б. $xa > xb$, $ax > bx$ для любого $a < b$.

Множество G_+ всех элементов группы G, удовлетворяющих условию А, является выпуклой инвариантной частично упорядоченной (ч. у.) подгруппой индекса два группы G и, кроме того, частичный порядок подгруппы G_+ сохраняется под действием внутренних автоморфизмов группы G. Группа G полуоднородно частично упорядочиваема тогда и только тогда, когда она содержит чистую инвариантную полугруппу P, лежащую в некоторой подгруппе H индекса два. Полуоднородный частичный порядок группы G определен однозначно при помощи полугруппы P следующим образом. Неравенство $x > y$ выполнено в G тогда и только тогда, когда имеет место одно из условий:

1. $x \in H$, $y \in G \setminus H$;
2. $x \in H$, $y \in H$, $xy^{-1} \in P$;
3. $x \in G \setminus H$, $y \in G \setminus H$, $x^{-1}y \in P$.

Замечание. Если в п. ч. у. группе G существуют несравнимые элементы $x \in H$ и $y \in G \setminus H$, то можно продолжить полуоднородный частичный порядок группы G до максимального полуоднородного частичного порядка указанного вида. Отметим, что можно заменить условие 1 условием: 1′. $x \in G \setminus H$, $y \in H$ [2, гл. V, § 2].

Пусть G — п. ч. у. группа, H — подгруппа индекса два группы G, а P — чистая инвариантная полугруппа, лежащая в подгруппе H и определяющая полуоднородного частичного порядка группы G. Пусть группа H задана образующими элементами a_α $(\alpha \in A)$ и определяющими отношениями $P_i(a_\alpha) = Q_i(a_\alpha)$ $(i \in I)$, т. е. группа H имеет представление [3, гл. I, § 2]

$$(1) \qquad H = \langle a_\alpha \ (\alpha \in A); \quad P_i(a_\alpha) = Q_i(a_\alpha) \ (i \in I) \rangle.$$

Ясно, что группу G можно рассматривать как циклическое расширение группы H при помощи группы $\overline{G} = \langle u; \ u^2 = 1 \rangle$ и при следующем выборе системы факторов и автоморфизмов:

$$(e, e) = (\overline{u}, e) = (e, \overline{u}) = 1, \quad (\overline{u}, \overline{u}) = S(a_\alpha) \equiv S;$$
$$a_\alpha^u = U_\alpha(a_\beta),$$
$$a_\alpha^{u^2} = S^{-1} a_\alpha S,$$
$$a_\alpha^{u^m} = \begin{cases} S^{-k} a_\alpha S^k, & m = 2k, \\ S^{-k} a_\alpha^u S^k, & m = 2k+1, \end{cases}$$

где $\alpha \in A$, $\beta \in A$; $m > 2$, m — натуральное число; e—единичный элемент группы $\overline{G}$; $\overline{u}$ — элемент $\overline{G}$, определен словом u; символ 1 есть пустое слово, а $S(a_\alpha)$ и $U_\alpha(a_\beta)$ — слова над алфавитом $M_0 = \{a_\alpha / \alpha \in A\}$, выбранные так, что слова $U_\alpha(a_\beta)$ $(\alpha \in A)$ являются системой образующих для группы H и если $S(a_\alpha) \equiv a_{\alpha_1}^{k_1} \ldots a_{\alpha_s}^{k_s}$, то $a_{\alpha_1}^{k_1} \ldots a_{\alpha_s}^{k_s} = U_{\alpha_1}^{k_1} \ldots U_{\alpha_s}^{k_s}$ есть тождество в группе H с представлением (1). Расширение G, рассматриваемое как группа, несмотря на порядок в ней, имеет представление

$$(2) \qquad \begin{aligned} G = \langle b, a_\alpha \ (\alpha \in A); \quad & P_i(a_\alpha) = Q_i(a_\alpha) \ (i \in I), \\ b^2 = S(a_\alpha), \ & b^{-1} a_\alpha b = u_\alpha(a_\beta) \ (\alpha \in A, \ \beta \in A) \rangle \end{aligned}$$

[4, гл. 15, § 4].

Каждое слово группы G с представлением (2) равно слову вида $R(a_\alpha)$ или $bR(a_\alpha)$, где $R(a_\alpha)$ —слово над алфавитом M_0. При каждой вставке и вычеркивании определяющих, их обратных или тривиальных соотношений, элемент b^ε $(\varepsilon = \pm 1)$ вставится и вычеркивается четное число раз. Группа H вкладывается в группу G. При этом G является нетривиальным расширением группы H, так как образующий элемент b^ε не принадлежит группе H.

Пусть группа G имеет представление (2) и $S \equiv a_{\alpha_1}^{k_1} \ldots a_{\alpha_s}^{k_s} = U_{\alpha_1}^{k_1} \ldots U_{\alpha_s}^{k_s}$— тождество в G. Группа G полуоднородно частично упорядочиваема, так как она содержит инвариантную подгруппу H индекса два. $H = \{\{W\} / W = R(a_\alpha)$ $(\alpha \in A)\}$, где через $\{W\}$ обозначили элемент группы G, определен словом W. Ясно, что $\{W\} \in H$ тогда и только тогда, когда b^ε $(\varepsilon = \pm 1)$ встречается в слове W четное число раз. Пусть $\{A_j(a_\alpha) / j \in J\}$ совокупность слов, порождающих чистую инвариантную полугруппу P, $P \subset H$.

В множестве G_M всех слов над алфавитом $M = \{b, a_\alpha / \alpha \in A\}$ рассматриваем следующие элементарные преобразования:

1°. Выделение слова A_j $(j \in J)$, в любом слове $w \in G_M$ при помощи ассоциативного закона.

2°. Замена выделенного слова A_j $(j \in J)$ пустым словом.

3°. Вставка или вычеркивание в $W \in G_M$ определяющих, их обратных или тривиальных соотношений группы G.

Если $\{W\} \in H$, $\{V\} \in G \setminus H$, то в словах W и V слово A_j $(j \in J)$, можно выделить только следующим образом:

$$W \equiv X_1 A_j Y_1, \ \{X_1 Y_1\} \in H \ \text{и} \ V \equiv X_2 A_j Y_2, \ \{X_2 Y_2\} \in G \setminus H.$$

Будем говорить, что слово $W \in G_M$ находится в отношении φ со словом $V \in G_M$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1. $\{W\} \in H$, $\{V\} \in G \setminus H$;

2. $\{W\} \in H$, $\{V\} \in H$ и существует конечная цепь элементарных преобразований, проводящая слово W в слово V;

3. $\{W\} \in G \setminus H$, $\{V\} \in G \setminus H$ и существует конечная цепь элементарных преобразований, проводящая слово V в слово W.

Очевидно, что условие 2 определения реляции φ эквивалентно условию: 2'. $\{W\} \in H$, $\{V\} \in H$ и существует конечная цепь элементарных преобразований, проводящая слово $WV^{-1}(V^{-1}W)$ в пустое слово. Условие 3 того же самого определения эквивалентно условию: 3'. $\{W\} \in G \setminus H$, $\{V\} \in G \setminus H$ и существует конечная цепь элементарных преобразований, проводящая слово $W^{-1}V(VW^{-1})$ в пустое слово.

Пусть слово $W \in G_M$ находится в отношении ϱ со словом $V \in G_M$ в точности тогда, когда одновременно выполнено $W\varphi V$ и $V\varphi W$ или $W \equiv V$. ϱ есть реляция эквивалентности. Класс эквивалентности, определенный словом W, обозначаем через $\bar{W}$. Фактор-множество G_M/ϱ является группой относительно операций $\bar{W}\,\bar{V} = \overline{W\,V}$.

Пусть $\bar{W} \geqq \bar{V}$ тогда и только тогда, когда $W\varphi V$. Реляция $\geqq$ не зависит от выбора представителей классов эквивалентности и является реляцией упорядоченности в множестве G_M/ϱ.

Теорема 1. *Группа G_M/ϱ — полуоднородно частично упорядоченная группа, о-изоморфна полуоднородно частично упорядоченной группе G.*

Лемма 1.1. *Если $\{W\} \in H$ и существует конечная цепь элементарных преобразований, проводящая слово W в пустое слово, то $\{W\} \in P$.*

Доказательство. Пусть $W \equiv X_1 A_{j_1} Y_1 \xrightarrow{(1)} X_1 Y_1 \to \cdots X_2 A_{j_2} Y_2 \xrightarrow{(2)} X_2 Y_2 \to \cdots \to X_k A_{j_k} Y_k \xrightarrow{(k)} X_k Y_k \to \cdots \to 1$, где переходы $(1), \ldots, (k)$ — элементарные преобразования типа 2^0, а все остальные переходы — элементарные преобразования типа 1^0 и 3^0, является конечной цепью, проводящей слово W в пустое слово. Тогда

$$W \equiv X_1 A_{j_1} Y_1 = X_1 A_{j_1} X_1^{-1} X_1 Y_1 = X_1 A_{j_1} X_1^{-1} X_2 A_{j_2} Y_2$$
$$= X_1 A_{j_1} X_1^{-1} X_2 A_{j_2} X_2^{-1} X_2 Y_2 = \cdots = X_1 A_{j_1} X_1^{-1} \cdots X_k A_{j_k} Y_k$$
$$= X_1 A_{j_1} X_1^{-1} \cdots X_k A_{j_k} X_k^{-1} X_k Y_k = X_1 A_{j_1} X_1^{-1} \cdots X_k A_{j_k} X_k^{-1},$$

где X_i, Y_i $(i = 1, \ldots, k)$ — произвольные слова группы G. Так как P — инвариантная подгруппа группы G, то $\{W\} \in P$.

Лемма 1.2. *Пустое слово не находится в отношении φ ни с каким из слов A_j $(j \in J)$.*

Доказательство. Если $1\varphi A_j$ для некоторого $j \in J$, то существует конечная цепь элементарных преобразований, проводящая слово A_j^{-1} в пустое слово и ввиду леммы 1.1, $\{A_j\}^{-1} \in P$. Это противоречит чистоте полугруппы P.

Доказательство теоремы 1. Так как $\bar{W} = \{W\}$ для любого слова $W \in G_M$, то $G_M/\varrho = G$ как группы. Если $V \in \bar{W}$, т. е. $W\varrho V$, то слова W и V принадлежат одновременно подгруппе H или $G \setminus H$, и существуют конечные цепи элементарных преобразований $W \to \cdots \to W_i \to W_{i+1} \to \cdots$

$\to V$ и $V \to \cdots \to W$. Если $W_i \equiv XA_jY \to XY \equiv W_{i+1}$, то из существования цепи элементарных преобразований $W_{i+1} \to \cdots \to V \to \cdots \to W \to \cdots \to W_i$ следует $\overline{W}_i = \overline{W}_{i+1}$ и $\overline{A}_j = \overline{1}$. Следовательно, $V \in \{W\}$ и $\overline{W} \subseteq \{W\}$. Очевидно, что $\{W\} \subseteq \overline{W}$.

Пусть τ — тождественное отображение группы G на себя.

Если $\overline{W} > \overline{V}$ неравенство в п. ч. у. группе G, то имеет место один из случаев:

1. $\overline{W} \in H$, $\overline{V} \in G \setminus H$ и $\overline{W} > \overline{V}$ неравенство в группе G_M/ϱ.

2. $\overline{W} \in H$, $\overline{V} \in H$ и $\overline{WV^{-1}} \in P$. Если $X_1^{-1}A_{j_1}X_1 \cdots X_k^{-1}A_{j_k}X_k = WV^{-1}$, где $\overline{X}_i \in G$, $j_i \in J$ $(i = 1, \ldots, k)$, то $WV^{-1} \to \cdots \to X_1^{-1}A_{j_1}X_1 \ldots X_k^{-1}A_{j_k}X_k \to X_1^{-1}X_1X_2^{-1}A_{j_2}X_2 \ldots X_k^{-1}A_{j_k}X_k \to X_2^{-1}A_{j_2}X_2 \ldots X_k^{-1}A_{j_k}X_k \to \cdots \to X_k^{-1}A_{j_k}X_k \to X_k^{-1}X_k \to 1$ конечная цепь элементарных преобразований в множестве G_M, проводящая слово WV^{-1} в пустое слово и $\overline{W} > \overline{V}$ — неравенство в группе G_M/ϱ.

3. $\overline{W} \in G \setminus H$, $\overline{V} \in G \setminus H$ и $\overline{W^{-1}V} \in P$. Как в случае 2, доказывается существование конечной цепи элементарных преобразований, проводящей слово $W^{-1}V$ в пустое слово.

Пусть $\overline{W} > \overline{V}$ неравенство в группе G_M/ϱ.

1. Если $\overline{W} \in H$, $\overline{V} \in G \setminus H$, то $\overline{W} > \overline{V}$ неравенство и в п. ч. у. группе G.

2. Пусть $\overline{W} \in H$, $\overline{V} \in H$. Существует конечная цепь элементарных преобразований, проводящая слово WV^{-1} $(\overline{WV^{-1}} \in H)$ в пустое слово. По лемме 1.1 $\overline{W}\overline{V}^{-1} \in P$ и $\overline{W} > \overline{V}$ неравенство в п. ч. у. группе G.

3. Случай $\overline{W} \in G \setminus H$, $\overline{V} \in G \setminus H$ аналогичен предыдущему.

Следовательно, каждая полуоднородно частично упорядоченная группа обладает представлением образующими элементами и определяющими неравенствами следующего вида:

$$\begin{aligned} &\Gamma = \langle\, b, a_\alpha \quad (\alpha \in A);\ P_i(a_\alpha) = Q_i(a_\alpha) \quad (i \in I),\ b^2 = S(a_\alpha), \\ (3)\qquad &b^{-1}a_\alpha b = U_\alpha(a_\beta) \quad (\alpha \in A,\ \beta \in A),\ A_j(a_\alpha) > 1 \quad (j \in J)\rangle, \end{aligned}$$

где определяющие неравенства $A_j(a_\alpha) > 1$ $(j \in J)$ необратимы, а все остальные определяющие неравенства являются определяющими отношениями.

Пример. Пусть $H = \langle a\rangle$, $\overline{G} = \langle u;\ u^2 = 1\rangle$, а P — чистая инвариантная полугруппа, порожденная элементом a. Прямое произведение групп H и $\overline{G}$ является полуоднородно линейно упорядоченной группой с представлением

$$G = \langle a, b;\ ab = ba,\ b^2 = 1,\ a > 1\rangle.$$

Все остальные полуоднородно частично упорядочиваемые расширения бесконечной циклической группы при помощи циклической группы второго рода имеет представление вида

$$\Gamma = \langle a, b;\ ab = ba,\ b^2 = a^k,\ a^s > 1\rangle,$$

где k, s — целые числа.

Отображение ψ п. ч. у. группы G_1 в п. ч. у. группу G_2 является слабо монотонным гомоморфизмом, если ψ групповой гомоморфизм и неравенство $W > V$ в группе G_1 влечет за собой неравенство $W\psi > V\psi$ в группе G_2.

Отображение ψ п. ч. у. группы G_1 на п. ч. у. группу G_2 является монотонным гомоморфизмом, если: 1) ψ слабо монотонный гомоморфизм; 2) если $W' > V'$ неравенство в группе G_2, то существуют первообразы W и V соответственно W' и V', такие, что $W > V$ неравенство в группе G_1 [1].

Теорема 2. *Если п.ч.у. группы Γ_1 и Γ_2 заданы одной и той же системой образующих и совокупность определяющих неравенств группы Γ_2 содержит совокупность определяющих неравенств группы Γ_1, то п.ч.у. группа Γ_2 — слабо монотонно гомоморфный образ п.ч.у. группы Γ_1.*

Доказательство. Пусть п. ч. у. группы Γ_1 и Γ_2 удовлетворяют условию теоремы, и группа Γ_1 имеет представление (3). Если определяющее отношение группы Γ_2, которое не является определяющим отношением группы Γ_1, содержит элемент b^ε $(\varepsilon = \pm 1)$, то оно содержит этот элемент только четное число раз и подходящими трансформациями Титца [3, гл. I, § 5] заменимо соотношением, которое уже не содержит элемента b^ε.

Пусть п.ч.у. группа Γ_2 обладает представлением

$$\Gamma_2 = \langle b, a_\alpha \quad (\alpha \in A);\ P_\gamma(a_\alpha) = Q_\gamma(a_\alpha) \quad (\gamma \in I \cup I'),\ b^2 = S(a_\alpha),$$
$$b^{-1} a_\alpha b = U_\alpha(a_\beta) \quad (\alpha \in A,\ \beta \in A),\ A_\delta(a_\alpha) > 1 \quad (\delta \in J \cup J')\rangle.$$

Обозначим через H_1 и H_2 инвариантные подгруппы индекса два соответственно группы Γ_1 и Γ_2, а чрез $\overline{W} \in \Gamma_1$ и $\{W\} \in \Gamma_2$ — элементы соответственных групп, определенные словом W. Группа Γ_2 — гомоморфный образ группы Γ_1 в теоретико-групповом смысле, если ψ — соответствие, отображающее любое слово группы Γ_1 в то же самое слово группы Γ_2 [3, следствие 1.1.3, гл. I, § 2]. Так как $\overline{W} \in H_1$ $(\overline{W} \in \Gamma_1 \setminus H_1)$ выполнено в точности тогда, когда $\{W\} \in H_2$ $(\{W\} \in \Gamma_2 \setminus H_2)$, то если $\overline{W} > \overline{V}$ неравенство в п. ч. у. группе Γ_1 и $\overline{W} \in H_1$, а $\overline{V} \in \Gamma_1 \setminus H_1$, $\{W\} > \{V\}$ — неравенство в п. ч. у. группе Γ_2. Если $\overline{W} \in H_1$, $\overline{V} \in H_1$ $(\overline{W} \in \Gamma_1 \setminus H_1,\ \overline{V} \in \Gamma_1 \setminus H_1)$, то любая цепь элементарных преобразований в группе Γ_1, проводящая слово W (V) в слово V (W), является цепью элементарных преобразований и в группе Γ_2.

Следствие. *Если п.ч.у. группы Γ_1 и Γ_2 заданы одной и той же системой образующих и совокупность определяющих неравенств группы Γ_2 содержит кроме определяющих неравенств группы Γ_1 и необратимые определяющие неравенства, то $\Gamma_1 = \Gamma_2$ как группы и полуоднородный частичный порядок группы Γ_2 есть продолжение полуоднородного частичного порядка группы Γ_1.*

Теорема 3. *Если п.ч.у. группы Γ_1 и Γ_2 заданы одной и той же системой образующих и совокупность определяющих неравенств группы Γ_2 содержит кроме определяющих неравенств группы Γ_1 только определяющие отношения, то п.ч.у. группа Γ_2 является монотонно гомоморфным образом п.ч.у. группы Γ_1.*

Доказательство. Если п. ч. у. группа Γ_1 обладает представлением (3), то п. ч. у. группа Γ_2 имеет представление

$$\Gamma_2 = \langle b, a_\alpha \quad (\alpha \in A);\ P_\gamma(a_\alpha) = Q_\gamma(a_\alpha) \quad (\gamma \in I \cup I'),\ b^2 = S(a_\alpha),$$
$$b^{-1} a_\alpha b = U_\alpha(a_\beta),\ (\alpha \in A,\ \beta \in A),\ A_j(a_\alpha) > 1 \quad (j \in J)\rangle.$$

П. ч. у. группа Γ_2 является слабо монотонно гомоморфным образом п. ч. у. группы Γ_1 при соответствии ψ, отображающее любое слово над алфавитом $\{b, a_\alpha/\alpha \in A\}$ на себя. Будем пользовать обозначения из теоремы 2. Пусть $\{W\} > \{V\}$ неравенство в п.ч.у. группе Γ_2.

1. Если $\{W\} \in H_2$, $\{V\} \in \Gamma_2 \setminus H_2$, то как в теореме 2 показывается, что $\bar{W} > \bar{V}$ неравенство в п.ч.у. группе Γ_1.

2. Пусть $\{W\} \in H_2$, $\{V\} \in H_2$. Существует конечная цепь элементарных преобразований в группе Γ_2, проводящая слово WV^{-1} в пустое слово. По лемме 1.1 $X_1^{-1}A_{j_1}X_1 \dots X_k^{-1}A_{j_k}X_k \equiv R = WV^{-1}$, где $\{X_i\} \in \Gamma_2$, $j_i \in J$ $(i = 1, \dots, k)$. Слово RV является первообразом слова W при гомоморфизме ψ. Конечная цепь элементарных преобразований в группе Γ_2

$$RV \to X_1^{-1}X_1X_2^{-1}A_{j_2}X_2 \dots X_k^{-1}A_{j_k}X_kV \to X_2^{-1}A_{j_2}X_2 \dots X_k^{-1}A_{j_k}X_kV$$

$$\to X_2^{-1}X_2 \dots X_k^{-1}A_{j_k}X_kV \to \dots \to X_k^{-1}A_{j_k}X_kV \to X_k^{-1}X_kV \to V$$

является цепью элементарных преобразований и в группе Γ_1, так как необратимые определяющие неравенства группы Γ_1 и Γ_2 одни и те же. Выполнено $\overline{RV} \in H_1$ и $\bar{V} \in H_1$. Следовательно, $\overline{RV} > \bar{V}$ неравенство в п.ч.у. группе Γ_1.

3. Если $\{W\} \in \Gamma_2 \setminus H_2$, $\{V\} \in \Gamma_2 \setminus H_2$, то аналогичным образом доказывается, что $Y_1^{-1}A_{\gamma_1}Y_1 \dots Y_m^{-1}A_{\gamma_m}Y_m \equiv T = W^{-1}V$, где $\{Y_i\} \in \Gamma_2$, $\gamma_i \in J$ $(i = 1, \dots, m)$. Слово WT есть первообраз слова V и $\bar{W} > \overline{WT}$ — неравенство в п.ч.у. группе Γ_1.

Из определения неравенства в п.ч.у. группе, обладающей данным представлением, следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *Проблема неравенства в п.ч.у. группе Γ с представлением* (3), *где слова $U_\alpha(a_\beta)$ $(\alpha \in A;\ \beta \in A)$ являются системой образующих подгруппы H с представлением* (1), *разрешима тогда и только тогда, когда разрешима проблема неравенства в ч.у. группе H с представлением*

$$H = \langle a_\alpha \quad (\alpha \in A);\ P_i(a_\alpha) = Q_i(a_\alpha),\ (i \in I),\ A_j(a_\alpha) > 1 \quad (j \in J)\rangle.$$

Примеры. Проблема неравенства разрешима в п.ч.у. группе

$$\Gamma = \langle a_1, a_2, b;\ b^2 = a_1,\ b^{-1}a_1b = a_1,\ b^{-1}a_2b = a_2^{-1},\ a_1 > 1\rangle,$$

так как разрешима проблема неравенства в ч.у. группе

$$H = \langle a_1,\ a_2;\ a_1 > 1\rangle.$$

Неравенство $W > V$ выполнено в H в точности тогда, когда $1 \in M(WV^{-1})$, где $M(WV^{-1})$ — множество всех слов дерева элементарных преобразований слова WV^{-1}, полученных без вставки и вычеркивания тривиальных соотношений. Если

$$WV^{-1} \to \dots \to a_1^{-\alpha_1}a_2^{\beta_1}a_1^{-\alpha_2}a_2^{\beta_2} \dots a_1^{-\alpha_s}a_2^{\beta_s} \equiv R,$$

где α_i неотрицательные числа, а β_i целые числа $(i = 1, \dots, s)$, чтобы продолжить цепь элементарных преобразований в ч.у. группе H, необходимо вставить и вычеркнуть тривиальные соотношения и при каждом вычеркивании слова a^α, α — натуральное число, длина новополученного слова больше длины слова R.

Аналогичным способом решается проблема неравенства в ч.у. свободном произведении конечных и бесконечных циклических групп

$$H = \langle a_\alpha \quad (\alpha \in A);\ a_\beta^{k_\beta} = 1 \quad (\beta \in I),\ a_\gamma^{l_\gamma} > 1 \quad (\gamma \in J)\rangle$$

и соответственно в п.ч.у. группе

$$\Gamma=\langle b,\ a_\alpha\quad (\alpha\in A);\ a_\beta^{k_\beta}=1\quad (\beta\in I),\ b^2=S(a_\alpha),$$

$$b^{-1}a_\alpha b=U_\alpha(a_\delta)\quad (\alpha\in A,\ \delta\in A),\ a_\gamma^{l_\gamma}>1\quad (\gamma\in J)\rangle,$$

где слова $U_\alpha(a_\delta)$ $(\alpha\in A)$ составляют систему образующих группы H и $I\cap J=\varnothing$, $I\subset A$, $J\subset A$; k_β, l_γ — натуральные числа.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Френкель. О задании частично упорядоченных групп определяющими неравенствами. *Успехи мат. наук*, **20**, 1965, №6, 164—168.
2. А. И. Кокорин, В. М. Копитов. Линейно упорядоченные группы. Москва, 1972.
3. W. Magnus, A. Karrass, D. Soliter. Combinatorial group theory. New York, 1966.
4. М. Холл. Теория групп. Москва, 1962.

Пловдивский университет
4000 Пловдив

Поступила 14. 6. 1976