PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГРАФОВ С ФИЛЬТРАМИ

НЕДЯЛКО Д. НЕНОВ, НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ

В работе вводится понятие фильтра в графе и даются точные оценки сверху для числа ребер тех графов, которые содержат фильтр. Дается полное описание экстремальных графов.

1. В этой работе под графом всюду будем подразумевать неориентированный граф без петель и кратных ребер. Через $V(G)$ и $E(G)$ будем обозначать соответственно множество вершин и множество ребер графа G. Число ребер графа G будем обозначать через $e(G)$. Совокупность ершин $[v_1, \dots, v_p]$ графа G будем называть p-кликой, если любые две из них смежны. Число s будем называть кликовым числом графа G, если граф G содержит хотя бы одну s-клику, но не содержит $(s+1)$-клик. Будем писать $k(G)=s$. Обозначим через K_p полный граф с p вершинами. Через $\overline{K}_p$ обозначим граф с p вершинами, который не имеет ребер, т. е. $e(\overline{K}_p)=0$.

Если графы G_1 и G_2 имеют непересекающиеся множества вершин, то соединением G_1+G_2 называется граф G, для которого $V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$ и $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup E_{1,2}$, где $E_{1,2}$ состоит из всех неупорядоченных пар $[v_1, v_2]$, $v_1\in V(G_1)$ и $v_2\in V(G_2)$. Если имеется множество графов $G_1, G_2, \dots, G_k$, без общих вершин, то соединение $G_1+\dots+G_k$ определяется индуктивно: $(G_1+\dots+G_{k-1})+G_k$. Введем еще следующие обозначения: $0.G=\varnothing$; $mG=(m-1)G+G$, где m — неутральное число.

Граф G называется s-хроматическим, если множество его вершин можно разбить на s дизъюнктных подмножеств так, что в любом из них нет смежных вершин. Любое из этих s подмножеств называется хроматическим классом. Если любые две вершины, принадлежащие разным хроматическим классам, смежны, будем говорить, что G является полным s-хроматическим графом.

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_s$ — естественные числа. Тогда очевидно $G=\overline{K}_{p_1}+\overline{K}_{p_2}+\dots+\overline{K}_{p_s}$ является полным s-хроматическим графом, имеющим p_i вершины i-ого хроматического класса.

Пусть $v\in V(G)$. Через $d(v, G)$ будем обозначать число вершин графа G, смежных вершине v. Если $A\subset V(G)$, через $\langle A\rangle$ будем обозначать граф, для которого $V(\langle A\rangle)=A$ и $E(\langle A\rangle)$ состоит из всех ребер графа G, оба конца которых принадлежат множеству A.

Определение фильтра. *Будем говорить, что последовательность $\{A_i\}$, $0\leqq i\leqq s-1$, $s\geqq 2$, подмножеств множества вершин графа G, является фильтром длины s этого графа, если она удовлетворяет следующим требованиям:*

1) $V(G)=A_0\supset A_1\supset\ldots\supset A_{s-1}$; $A_0\neq A_1\neq\ldots\neq A_{s-1}$,

2) $|A_i|\geqq\max d(v,\ \langle A_{i-1}\rangle)$, $1\leqq i\leqq s-1$,

3) $k(\langle A_{s-1}\rangle)=1$.

Основная теорема. *Пусть G — граф с фильтром $\{A_i\}$, $0\leqq i\leqq s-1$, $s\geqq 2$, длины s и пусть $|A_i|=q_i$. Положим $p_i=q_{i-1}-q_i$, $1\leqq i\leqq s-1$, и $p_s=q_{s-1}$. Тогда*

$$e(G)\leqq\Sigma\{p_ip_j\mid 1\leqq i<j\leqq s\},\tag{1}$$

$$e(G)=\Sigma\{p_ip_j\mid 1\leqq i<j\leqq s\}\Rightarrow G=\bar K_{p_1}+\ldots+\bar K_{p_s}.\tag{2}$$

Как следствие из основной теоремы мы получим некоторые, доказанные ранее результаты [1, 2]. Из основной теоремы следует тоже известная теорема П. Турана [4].

2. Доказательство основной теоремы. Для доказательства основной теоремы нам будет нужна следующая лемма:

Лемма. *Пусть G — граф, имеющий максимальную степень вершин d и пусть A множество вершин графа G, для которого $\langle A\rangle=\bar K_m$. Тогда*

$$e(G)\leqq d(n-m),\quad \text{где } n=|V(G)|.\tag{3}$$

$$\text{Если } m\geqq d, \text{ очевидно } e(G)\leqq m(n-m).\tag{4}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\langle V(G)\setminus A\rangle=\bar K_{n-m}$ и $G=\bar K_m+\bar K_{n-m}$.

Доказательство. Пусть $V(G)\setminus A=\{v_1,\ldots,v_{n-m}\}$. Так как по условию $\langle A\rangle=\bar K_m$, то

$$e(G)\leqq d(v_1)+d(v_2)+\ldots+d(v_{n-m})\leqq d(n-m),\quad \text{где } d(v_i)=d(v_i,\ G).\tag{5}$$

Притом, если $m\geqq d$, очевидно $e(G)\leqq m(n-m)$. Пусть $e(G)=m(n-m)$. Тогда из (5) следует

$$e(G)=d(v_1)+\ldots+d(v_{n-m}),\tag{6}$$

$$d(v_i,\ G)=m,\quad 1\leqq i\leqq n-m.\tag{7}$$

Из (6) следует $\langle V(G)\setminus A\rangle=\bar K_{n-m}$. Теперь из (7) следует $G=\bar K_m+\bar K_{n-m}$. Лемма доказана полностью.

Доказательство основной теоремы. Доказательство проведем индукцией по s. При $s=2$ теорема очевидно совпадает с леммой. Пусть $s>2$. Очевидно, что

$$e(G)=l+e(\langle A_1\rangle),\tag{8}$$

где l — число ребер, имеющих хотя бы одну вершину в $V(G)\setminus A_1$.

Рассмотрим граф $\hat G$, для которого $V(\hat G)=V(G)$ и $E(\hat G)=E(G)\setminus E(\langle A_1\rangle)$ Ясно, что $|E(\hat G)|=l$ и что к $\hat G$ можно применить лемму, а именно

$$l\leqq p_1(n-p_1),\quad n=|V(G)|.\tag{9}$$

$$l=p_1(n-p_1)\Rightarrow\langle V(\hat G)\setminus A_1\rangle=\bar K_{p_1},\quad \hat G=\bar K_{p_1}+\bar K_{n-p_1}.\tag{10}$$

Рассмотрим граф $\langle A_1\rangle$. Он имеет фильтр $\{A_i\}$, $1\leqq i\leqq s-1$, длины $s-1$ и, следовательно, к нему можно применить предположение индукции, т. е.

(11) $$e(\langle A_1\rangle)\leq\Sigma\{p_ip_j\mid 2\leq i<j\leq s\},$$

(12) $$e(\langle A_1\rangle)=\Sigma\{p_ip_j\mid 2\leq i<j\leq s\}\Rightarrow\langle A_1\rangle=\overline{K}_{p_2}+\ldots+\overline{K}_{p_s}.$$

Так как $n-p_1=p_2+\ldots+p_s$, то (1) следует из (8), (9) и (11). Пусть $e(G)=\Sigma\{p_ip_j\mid 1\leq i<j\leq s\}$. В этом случае $l=p_1(n-p_1)$ и $e(\langle A_1\rangle)=\Sigma\{p_ip_j\mid 2\leq i<j\leq s\}$. Из (10) следует $G=\overline{K}_{p_1}+\langle A_1\rangle$, а из последнего равенства и (12) следует (2).

Основная теорема доказана.

3. Следствия из основной теоремы.

Следствие 1. *Пусть G — граф, для которого существует последовательность $\{A_i\}$, $0\leq i\leq s-1$, $s\geq 2$, подмножеств множества $V(G)$ удовлетворяющая условиям:*

1. $V(G)=A_0\supset A_1\supset\ldots\supset A_{s-1}$, $A_0\neq A_1\neq\ldots\neq A_{s-1}$.
2. $|A_i|\geq\max d(v,\langle A_{i-1}\rangle)$, $1\leq i\leq s-1$.

Пусть $q_i=|A_i|$, $0\leq i\leq s-1$, $p_i=q_{i-1}-q_i$, $1\leq i\leq s-1$, и $p_s=q_{s-1}$. Тогда

(13) $$e(G)\leq\Sigma\{p_ip_j\mid 1\leq i<j\leq s-1\}+e(\langle A_{s-1}\rangle).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда

(14) $$G=\overline{K}_{p_1}+\ldots+\overline{K}_{p_{s-1}}+\langle A_{s-1}\rangle.$$

Доказателство. Рассмотрим граф $\widehat{G}$, для которого $V(\widehat{G})=V(G)$ и $E(\widehat{G})=E(G)\setminus E(\langle A_{s-1}\rangle)$. Ясно, что

(15) $$e(G)=e(\widehat{G})+e(\langle A_{s-1}\rangle).$$

Очевидно граф $\widehat{G}$ является графом с фильтром $\{A_i\}$, $0\leq i\leq s-1$, длины s. Согласно основной теореме

(16) $$e(\widehat{G})\leq\Sigma\{p_ip_j\mid 1\leq i<j\leq s\}.$$

Неравенство (13) вытекает из (15) и (16). Пусть в (13) есть равенство. Тогда равенство должно быть и в (16). Согласно основной теореме

(17) $$\widehat{G}=\overline{K}_{p_1}+\ldots+\overline{K}_{p_s}.$$

Из (17) легко получается (14).

Следствие 2 [1; 2]. *Пусть G — граф, v_1 — вершина максимальной степени d_1 графа G, v_{i+1} — вершина максимальной степени d_{i+1} графа $A(v_1,\ldots,v_i)$, который есть подграф графа G, порожденный множеством вершин, смежных всем вершинам $v_1, v_2,\ldots,v_i$, $1\leq i\leq t-1$. Разобьем в $t+1$ группы совокупность вершин графа G следующим образом: к первой группе P_1 перечислим все вершины, несмежные v_1, включая и v_1, к $(i+1)$-ой группе P_{i+1} перечислим все вершины графа $A(v_1, v_2,\ldots,v_i)$, несмежные вершине v_{i+1}, включая и v_{i+1}, $1\leq i\leq t-1$, а к $(t+1)$-ой группе перечислим все вершины графа $A(v_1,\ldots,v_t)$. Пусть $|P_i|=p_i$. Тогда*

$$e(G) \leqq \Sigma\{p_i p_j \mid 1 \leqq i < j \leqq t+1\} + e(\langle P_{t+1}\rangle).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$G = \overline{K}_{p_1} + \ldots + \overline{K}_{p_t} + \langle P_{t+1}\rangle.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность подмножеств $\{A_i\}$, $0 \leqq i \leqq t$, множества $V(G)$, получающиеся следующим образом: $A_0 = V(G)$, $A_i = A(v_1, v_2, \ldots, v_i)$, $1 \leqq i \leqq t$. Очевидно последовательность $\{A_i\}$, $0 \leqq i \leqq t$, удовлетворяет условиям следствия 1, так что утверждение непосредственно следует из следствия 1.

Дальше нам будут нужны следующие два предложения.

Предложение 1. *Если $k(G) = s$, то тогда граф G имеет фильтр длины s.*

Доказательство. Положим $A_0 = V(G)$, A_1 есть максимальное в смысле мощности подмножество $V(G)$, для которого $k(\langle A_1\rangle) = s-1$, A_i есть максимальное в смысле мощности подмножество A_{i-1}, для которого $k(\langle A_i\rangle) = s-i$, $1 \leqq i \leqq s-1$. Для доказательства того, что последовательность $\{A_i\}$, $0 \leqq i \leqq s-1$, является фильтром длины s, нужно показать, что $|A_i| \geqq \max d(v, \langle A_{i-1}\rangle)$, $1 \leqq i \leqq s-1$. В самом деле, пусть v — произвольная вершина множества A_{i-1}. Множество смежных ее вершин в $\langle A_{i-1}\rangle$ обозначим через B. Ясно, что $k(\langle B\rangle) \leqq s-i$ (иначе получим, что $k(\langle A_{i-1}\rangle) > s-i+1$). Из способа построения A_i получим $|A_i| \geqq |B| = d(v, \langle A_{i-1}\rangle)$, для любой вершины $v \in A_{i-1}$. Следовательно, $|A_i| \geqq \max d(v, \langle A_{i-1}\rangle)$, $1 \leqq i \leqq s-1$. Предложение 1 доказано.

Пусть n, s, k и ν — натуральные числа, для которых выполняются следующие условия:

$$n = sk + \nu, \quad 1 \leqq s \leqq n, \quad 0 \leqq \nu \leqq s-1.$$

Граф $T(n, s) = \nu\overline{K}_{k+1} + (s-\nu)\overline{K}_k$ принято называть графом Турана. Нетрудно показать, что

$$e(T(n, s)) = \frac{(n^2-\nu^2)(s-1)}{2s} + \binom{\nu}{2}. \tag{18}$$

Предложение 2. *Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — естественные числа и $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_s$. Тогда $\Sigma\{p_i p_j \mid 1 \leqq i < j \leqq n\} \leqq e(T(n, s))$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда ν из чисел p_i равны $k+1$, а остальные равны k.*

Предложение 2 есть широко известный факт и его доказательство можно посмотреть, например, в [3].

Следствие 3. *Если граф G имеет фильтр длины s, то $e(G) \leqq e(T(n, s))$, где $n = |V(G)|$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $G = T(n, s)$.*

Следствие 3 непосредственно вытекает из основной теоремы и предложения 2.

Следствие 4. *Пусть $A \subset V(G)$, $|A| \geqq \max d(v, G)$ и $k(\langle A\rangle) = s-1$. Тогда $e(G) \leqq e(T(n, s))$. Равенство возможно тогда и только тогда, когда $G = T(n, s)$.*

Доказательство. Рассмотрим граф $\langle A\rangle$. Согласно предложению 1 граф $\langle A\rangle$ имеет фильтр $\{A_i\}$, $0 \leqq i \leqq s-2$, длины $(s-1)$. Очевидно, однако, что

$V(G)$ и $\{A_i\}$, $0 \leqq i \leqq s-2$, образуют фильтр графа G, длины s. Теперь следствие 4 вытекает из следствия 3.

Следствие 5. *Если $e(G) > e(T(n, s))$, то для любого $A \subset V(G)$, такое, что $k(\langle A \rangle) \leqq s-1$ имеем $|A| < \max d(v, G)$.*

Следствие 6 [4]. *Если $k(G) \leqq s$, то $e(G) \leqq e(T(n, s))$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $G = T(n, s)$.*

Следствие 6 вытекает непосредственно из предложения 1 и предложения 2, имеяв виду, что если $\bar{s} < s$, то $e(T(n, \bar{s})) < e(T(n, s))$.

Наконец приведем две простые следствия из леммы.

Следствие 7. *Пусть G — граф, имеющий максимальную степень вершин d и $e(G) > m(n-m)$, где $n = |V(G)|$ и m — число стабильности графа G, т. е. $m = k(\bar{G})$. Тогда $m < d$.*

Следствие 8. *Пусть G — граф, имеющий вершину v_1 максимальной степени d, которая не является вершиной треугольника. Если $m = k(\bar{G})$, то $e(G) \leqq m(n-m)$.*

В частности, последнее неравенство выполнено, если G не содержит треугольников [5].

Результаты этой работы были докладованы нами на втором национальном коллоквиуме по алгебре, в сентябре 1976 г. Эти же результаты мы докладывали и на семинаре по теории графов в Софийском университете.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Хаджииванов, Н. Ненов. О максимуме числа ребер графа. *Доклады БАН*, **29**, 1976, 1575—1578.
2. Н. Хаджииванов, Н. Ненов. Экстремальные задачи для s-графов. *Сердика*, **3**, 1977, 117—125.
3. Н. Хаджииванов. Цветни графи. *Математика*, **15**, 1976, № 6, 16—18.
4. P. Turan. On the theory of graphs. *Coll. Math.*, **3**, 1954, 19—30.
5. B. Andrasfai. Über ein Extremalproblem der Graphentheorie. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 13, 1962, 443—445.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 28. 4. 1977