PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ПОЧТИ СЛАБО НЕТЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР С ЕДИНИЦЕЙ

ИВАН К. ТОНОВ

Светлой памяти К. Дочева посвящается

Рассматриваются многообразия ассоциативных алгебр с единицей над полем K характеристики нуль. В работе [1] описаны почти слабо нетеровы многообразия ассоциативных алгебр (без единицы). В настоящей заметке решается аналогичный вопрос для многообразий алгебр с единицей.

Введем некоторые определения:

1. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется слабо нетеровым, если каждая конечно-порожденная алгебра многооброзия $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию максимальности для двусторонних идеалов. В работе [2] описаны слабо нетеровы многообразия: Многобразие $\mathfrak{M}$ является слабо нетеровым тогда и только тогда, когда элемент вида

$$xy^nx+\sum_{p,q}\alpha_{pq}y^pxy^qxy^{n-p-q}\in T(\mathfrak{M}).$$

2. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется почти слабо нетеровым, если $\mathfrak{M}$ — не слабо нетерово многообразие, а каждое собственное подмногообразие многообразия $\mathfrak{M}$ является слабо нетеровым.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — почти слабо нетерово многообразие ассоциативных алгебр с единицей. Тогда*

(i) $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]\in T(\mathfrak{M})$,

(ii) $[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5]\in T(\mathfrak{M})$.

(iii) $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\in T(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Пусть полилинейный полином $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть линейная комбинация элементов вида $x_{i_1}\dots x_{i_k}[x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}]x_{j_1}\dots x_{j_l}$, $k\geqq 1$, $l\geqq 1$. Докажем, что $f(x)\in T(\mathfrak{M})$. Действительно, рассуждая от противного, получим, что $xy^nx+\Sigma\alpha_{p,q}y^pxy^qxy^{n-p-q}\in T(\mathfrak{M})+\{f\}^T$ и, следовательно, $xy^nx+\Sigma\beta_{p,q}y^pxy^qxy^{n-p-q}\in T(\mathfrak{M})$, так как имеются только два x и при специализации в части идеала $\{f\}^T$ получаются только одночлены, которые начинаются или оканчиваются y. Полученное противоречие доказывает, что $f\in T(\mathfrak{M})$. Заметим, что многочлены $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$, $[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5]$ и $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеют указанный вид и лемма доказана.

ПЛИСКА Български математически студии. Том 2, 1981, с. 162—165.

Лемма 2. *Через Q_1 обозначим T-идеал свободной алгебры с единицей $F=K\langle x\rangle$, порожденный полиномами $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$ и $[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5]$. Если λ_{ij} $(i, j=3, 4, \ldots, n,\ i\neq j)$ элементы поля K, для которых $\sum_i \lambda_{ij}=0$ для любого фиксированного индекса j и $\sum_j \lambda_{ij}=0$ для любого фиксированного индекса i, то полилинейный полином*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{i, j}\lambda_{ij}([x_1, x_i, \ldots][x_2, x_j]-[x_2, x_i, \ldots][x_1, x_j])\in Q_1$$

(необозначенные переменные в коммутаторах в возрастающем порядке).

Доказательство. В процессе доказательства часто применяются следующие сравнения по модулю Q_1:

$$[x_1, x_2, x_5][x_3, x_4]\equiv-[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5] \pmod{Q_1},$$

$$[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n][x_{n+1}, x_{n+2}]\equiv[x_1, x_2, x_{\sigma(3)}, \ldots, x_{\sigma(n)}][x_{n+1}, x_{n+2}] \pmod{Q_1},$$

где σ — любая перестановка участвующих индексов, а также и тождество Якоби.

Полином $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представим в сумму $f=\Sigma_{j=3}^n f_j$, где

$$f_j=\sum_i\lambda_{ij}([x_1, x_i, \ldots][x_2, x_j]-[x_2, x_i, \ldots][x_1, x_j]).$$

Установим некоторые сравнения по модулю Q_1.

1) $j\neq 3$. Тогда

$$\begin{aligned}
f_j=&\sum_i\lambda_{ij}([x_1, x_i, \ldots][x_2, x_j]-[x_2, x_i, \ldots][x_1, x_j])\\
&=\lambda_{3j}([x_1, x_3, \ldots][x_2, x_j]-[x_2, x_3, \ldots][x_1, x_j])\\
&+\sum_{i\neq 3}\lambda_{ij}[x_1, x_i, x_3, \ldots][x_2, x_j]-[x_2, x_i, x_3, \ldots][x_1, x_j])\\
&=\lambda_{3j}([x_1, x_3, \ldots][x_2, x_j]-[x_2, x_3, \ldots][x_1, x_j])\\
&+\sum_{i\neq 3}\lambda_{ij}([x_1, x_3, x_i, \ldots][x_2, x_j]-[x_2, x_3, x_i, \ldots][x_1, x_j])\\
&+\sum_{i\neq 3}\lambda_{ij}([x_3, x_i, x_1, \ldots][x_2, x_j]-[x_3, x_i, x_2, \ldots][x_1, x_j]).
\end{aligned}$$

Так как $\sum_i\lambda_{ij}=0$ и произведение коммутаторов $[x_1, x_3, x_i, \ldots][x_2, x_j]$ по модулю Q_1 не зависит от индекса i, то элемент f_j можно записать

$$\begin{aligned}
f_j\equiv&\sum_i\lambda_{ij}([x_3, x_i, x_1, \ldots][x_2, x_j]-[x_3, x_i, x_2, \ldots][x_1, x_j])\\
&\equiv-\sum_i\lambda_{ij}[x_3, x_i, \ldots]([x_2, x_j, x_1]-[x_1, x_j, x_2])\\
\equiv-&\sum_i\lambda_{ij}[x_3, x_i, \ldots][x_2, x_1, x_j]\equiv\sum_i\lambda_{ij}[x_3, x_i, \ldots, x_j][x_2, x_1] \pmod{Q_1}.
\end{aligned}$$

2) $j=3$. Тогда

$$f_3=\sum_i \lambda_{i3}([x_1, x_i, \ldots][x_2, x_3]-[x_2, x_i, \ldots][x_1, x_3])$$

$$=\lambda_{43}([x_1, x_4, \ldots][x_2, x_3]-[x_2, x_4, \ldots][x_1, x_3])$$

$$+\sum_{i\neq 4}\lambda_{i3}([x_1, x_i, x_4, \ldots][x_2, x_3]-[x_2, x_i, x_4, \ldots][x_1, x_3])$$

$$=\lambda_{43}([x_1, x_4, \ldots][x_2, x_3]-[x_2, x_4, \ldots][x_1, x_3])$$

$$+\sum_{i\neq 4}\lambda_{i3}([x_1, x_4, x_i, \ldots][x_2, x_3]-[x_2, x_4, x_i, \ldots][x_1, x_3])$$

$$+\sum_{i\neq 4}\lambda_{i3}([x_4, x_i, x_1, \ldots][x_2, x_3]-[x_4, x_i, x_2, \ldots][x_1, x_3])$$

$$\equiv-\sum_i \lambda_{i3}[x_4, x_i, \ldots,]([x_2, x_3, x_1]-[x_1, x_3, x_2])$$

$$\equiv-\sum_i \lambda_{i3}[x_4, x_i, \ldots][x_2, x_1, x_3]\equiv\sum_i \lambda_{i3}[x_4, x_i, x_3, \ldots][x_2, x_1]$$

$$\equiv\sum_i \lambda_{i3}[x_4, x_3, x_i, \ldots][x_2, x_1]+\sum_i \lambda_{i3}[x_3, x_i, \ldots][x_2, x_1]$$

$$\equiv\sum_i \lambda_{i3}[x_3, x_i, \ldots][x_2, x_1]\,(\mathrm{mod}\ Q_1).$$

Таким образом

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{j=3}^{n} f_j\equiv\sum_{i,j}\lambda_{ij}[x_3, x_i, \ldots][x_2, x_1]$$

$$\equiv\sum_i\sum_j \lambda_{ij}[x_3, x_i, \ldots][x_2, x_1]\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ Q_1).$$

Лемма доказана.

Основная теорема. *Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с единицей — почти слабо нетерово тогда и только тогда, когда $T(\mathfrak{M})=Q$, где Q — вполне характеристический идеал свободной алгебры F, порожденный полиномами $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$, $[[x_1, x_2][x_3, x_4]x_5]$ и $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{M}$ — почти слабо нетерово многообразие, из леммы 1 вытекает, что $Q\subset T(\mathfrak{M})$. Докажем, что $Q=T(\mathfrak{M})$. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ собственная полилинейная форма, не принадлежащая T-идеалу Q. Чтобы доказать теорему, нужно установить, что подмногообразие, соответствующее идеалу $Q+\{f\}^T$, слабо нетерово. Если $n=4$, из [3] вытекает, что в $Q+\{f\}^T$ должны лежать хоть один из полиномов $[x, y]^2$, $[x, y, y, y]$, $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$, которое показывает, что многообразие слабо нетерово. Если $n\geqq 5$, рассмотрим два случая:

1) $f \notin [F, F]^2$. Тогда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_i \alpha_i [x_1, x_i, x_2, \ldots, x_n] + g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \pmod{Q}$, где $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [F, F]^2$ и по крайней мере один из коэффициентов $\alpha_i \neq 0$. Пусть, например, $\alpha_{i_0} \neq 0$. Тогда, полагая $x_{i_0} = x$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{i_0-1} = x_{i_0+1} = \cdots = y$, получаем, что $\alpha_{i_0}[y, x, y, \ldots, y] \in Q + \{f(x_1, x_2, \ldots, x_n\}^T$, то есть подмногообразие многообразия $\mathfrak{M}$, порожденное полиномом $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является нетеровым [2], а, следовательно, и слабо нетеровым.

2) $f \in [F, F]^2$. Так как $[F, F]^3 \subset Q$, то полином $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить как линейную комбинацию произведений двух коммутаторов вида $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}][x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_l}]$, где $i_1 < i_2$, $i_1 < i_3 < \cdots < i_k$ и $j_1 < j_2$, $j_1 < j_2 < \cdots j_l$. Кроме того, имея в виду, что

$$[x_1, x_2, x_5][x_3, x_4] \equiv -[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5] \pmod{Q}$$

и применяя несколько раз тождество Якоби, можно записать $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ как сумму произведений коммутаторов, в которых x_1 и x_2 участвуют в разных коммутаторах и длина второго коммутатора равна 2, т. е.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_{i,j} \lambda_{ij}[x_1, x_i, \ldots][x_2, x_j] + \sum_{i,j}{}' \mu_{ij}[x_2, x_j, \ldots][x_1, x_j] \pmod{Q}.$$

Если для некоторой пары (i_0, j_0) индексов $\lambda_{i_0 j_0} + \mu_{i_0 j_0} \neq 0$, то положим $x_1 = x_2 = \cdots = y$, $x_{i_0} = x$, $x_{j_0} = yx$. Тогда

$$(\lambda_{i_0 j_0} + \mu_{i_0 j_0})[y, x, \ldots][y, yx] + (\lambda_{j_0 i_0} + \mu_{j_0 i_0})[y, yx, \ldots][y, x] \in Q + \{f(x)\}^T$$

и получается, что подмногообразие, порожденное элементом $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является слабо нетеровым [2].

Таким образом, можно предполагать, что для каждой пары индексов, (i, j) сумма $\lambda_{ij} + \mu_{ij}$ равна нулю. Тогда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет вид

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_{i,j} \lambda_{ij}([x_1, x_i, \ldots][x_2, x_j] - [x_2, x_i, \ldots][x_1, , x_j]) \pmod{Q}.$$

Так как $f \notin Q$, то ввиду леммы 2 по крайней мере одна из сумм $\sum_i \lambda_{ij}$ или $\sum_j \lambda_{ij}$ не равна нулю. Пусть, например, $\sum_i \lambda_{ij_0} \neq 0$. Тогда, полагая $x_1 = x$, $x_{j_0} = yx$, $x_2 = \cdots = y$, получим, что

$$f \equiv \Big(\sum_i \lambda_{ij_0}\Big)[x, y, \ldots, y][y, yx] - \Big(\sum_i \lambda_{j_0 i}\Big)[y, yx, \ldots][x, y] \pmod{Q},$$

которое показывает, что рассматриваемое подмногообразие снова является слабо нетеровым [2]. Теорема доказана.

В первоначальном варианте работы тождество $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ было пропущено. На эту ошибку автору обратил внимание Ю. Н. Мальцев. Автор выражает ему свою глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Мальцев. О многообразиях ассоциативных алгебр. *Алгебра и логика*, **15**, 1976, 579–584.
2. И. В. Львов. Условия максимальности в алгебрах с тождественными соотношениями. *Алгебра и логика*, **8**, 1969, 449—460.
3. И. К. Тонов. Цепные многообразия ассоциативных алгебр с единицей. *Сердика* в печати).

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 26. 10. 1977