PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

НАИЛУЧШИЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

РАЛИЦА К. КОВАЧЕВА

Пусть функция f принадлежит классу $H_2(\Gamma)$, Γ — единичная окружность и пусть m — фиксированное натуральное число. Рассматривается задача о необходимом и достаточном условии для продолжимости функции f до мероморфной в круге D_R радиуса $R(>0)$ с центром в нуле, имеющей в D_R ровно m полюсов. Необходимое и достаточное условие задаются в терминах наилучших рациональных приближеиий на Γ функции f в пространстве $L_2(\Gamma)$.

Для любого $\varrho>0$ обозначим через D_ϱ круг радиуса ϱ с центром в нуле, а через Γ_ϱ — соответствующую этому кругу окружность. Положим, в частности, $D_1=D$ и $\Gamma_1=\Gamma$. Для любого натурального m определим класс Π_m^* как множество всех полиномов p_m степени m и класс Π_m как множество всех полиномов степени не выше m; для любой фиксированной пары (n, m) натуральных чисел n, m определим класс $\Pi_{n,m}$ как множество всех рациональных функций типа p_n/p_m, где $p_n\in\Pi_n$, $p_m\in\Pi_m$, $p_m\not\equiv 0$.

Пусть комплекснозначная функция f, заданная своим разложением в степенной ряд в нуле,

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^\nu \tag{1}$$

принадлежить пространству $H_2(\Gamma)$ (т. е. ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty}|f_\nu|^2$ сходится; см., напр., [2]). Говорим, что функция f m-мероморфна в D_ϱ ($\widetilde{m}$-мероморфна соответственно), где $\varrho>1$ и m — произвольное натуральное число, если определяемая рядом (1) функция продолжается до мероморфной функции в D_ϱ, имеющей в D_ϱ равно m полюсов, $f\in M_m(D_\varrho)$ (не более m полюсов, соответственно); полюсы считаются с учетом кратностей.

Для любой фиксированной пары (n, m) натуральных чисел обозначим через $R_{n,m}=R_{n,m}(f, L_2, \Gamma)$ рациональную функцию наилучшего приближения $f\in H_2(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$ в классе $\Pi_{n,m}$. Напомним, что норма $\|\ldots\|_{L_2(\Gamma)}$ в пространстве $L_2(\Gamma)$ определяется равенством: $\|\ldots\|_{L_2(\Gamma)}=\{1/2\pi\int_\Gamma|(\ldots)(z)|^2|dz|\}^{1/2}$. Обозначим через $Q_{n,m}=Q_{n,m}(f, L_2, \Gamma)$, $Q_{n,m}\in\Pi_m$ полином с коэффициентом перед старшей степенью единицей, который имеет свои нули в конечных полюсах функции $R_{n,m}$ и только в этих точках.

ПЛИСКА Български математически студии. Том 4, 1981, с. 15—22.

Целью настоящей работы является установление эквивалентности следующих утверждений:

1. $f \in M_m(D_R)$ *для некоторого* $R>1$ *и имеет полюсы в точках* $a_1, \ldots, a_m$, $1<|a_i|<R$, $i=1, 2, \ldots, m$.

2. *Существует полином* $Q_m \in \Pi_m^*$, $Q_m(z)=\Pi_{i=1}^m(z-a_i)$, $1<|a_i|<R$, $i=1, 2, \ldots, m$, *такой, что выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \| Q_{n,m}-Q_m \|^{1/n} \leq q<1. \tag{2}$$

Здесь норма понимается, например, в метрике коэффициентов. Числа q и R связаны соотношением: $q.R=M$, где $M=\max\{|a_i|, i=1, \ldots, m\}$.

Доказательство импликации 1. $\Longrightarrow$ 2. проведено по существу в работе Уолша [1]. Приведем здесь только основные теоремы, на которые опирается доказательство:

Теорема 1. *Пусть f голоморфна в D, $f \in M_m(D_R)$, $R>1$. Для любой фиксированной пары (n, m) натуральных чисел обозначим через $r_{n,m}$ рациональную функцию наилучшего приближения функции f на D в* классе *$\Pi_{n,m}$ в равномерной Чебышевской метрике:*

$$\| f-r_{n,m} \|_D = \inf\{\| f-\tilde{r}_{n,m} \|_D, \tilde{r}_{n,m} \in \Pi_{n,m}\}.$$

Тогда удовлетворяется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sup \| f-r_{n,m} \|_D^{1/n} \leq R^{-1}.$$

(*Напомним, что* $\| \ldots \|_D=\max\{|(\ldots)(z)|, z \in D\}$.)

Теорема 2. *Пусть f голоморфна в D, $f \in M_m(D_R)$, $R>1$ и пусть последовательность рациональных функций $\{S_{n,m}\}_{n=1}^\infty$, $S_{n,m} \in \Pi_{n,m}$ удовлетворяет при $n\to\infty$ соотношению:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \| f-S_{n,m} \|_D^{1/n} \leq R^{-1}.$$

Тогда для всех достаточно больших n функция $S_{n,m}$ имеет ровно m конечных полюсов, которые сходятся к полюсам функции f в круге D_R. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — полюсы функции f в круге D_R. Положим $D_R'=D_R-\{a_1, \ldots, a_m\}$. Тогда для любого компакта K, $K \subset D_R'$, справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sup \| f-S_{n,m} \|_K^{1/n} \leq \| z \|_K . R^{-1}.$$

Из теоремы 1 и 2 нетрудно получить, что полиномы $Q_{n,m}=Q_{n,m}(f, L_2, \Gamma)$, $n\to\infty$, и полином $Q_m(z)=\Pi_{k=1}^m (z-a_k)$ связаны соотношением

$$\lim_{n\to\infty} \sup \| Q_{n,m}-Q_m \|^{1/n} \leq M . R^{-1}, \quad M=\max\{|a_i|, i=1, \ldots, m\},$$

что есть и импликация 1. $\Longrightarrow$ 2.

Стоит отметить, что опираясь на работу [1], можно доказать импликацию 1. $\Longrightarrow$ 2. для любого пространства $L_p(\Gamma)$, $p\geq 1$ в соответствующей ему норме $\| \ldots \|_{L_p(\Gamma)}=\{(1/2\pi)\int_\Gamma |(\ldots)(z)|^p |dz|\}^{(1/p)}$ [7].

В доказательстве импликации 2. $\Longrightarrow$ 1. существен тот факт, что речь идет о наилучших приближениях в пространстве $L_2(\Gamma)$, так как мы будем опираться на результаты В. Д. Ерохина о наилучших приближениях в $L_2(\Gamma)$ [3].

Известно [2, гл. 9], что если рациональная функция типа $p_n(z)\{\Pi_{k=1}^m(z-a_k)^{-1}\}$, где $p_n \in \Pi_n$, а точки $\{a_k\}_{k=1}^m$ фиксированы, $1<|a_k|$, $k=1,\ldots,m$ осуществляет наилучшее приближение $f\in H_2(\Gamma)$ в пространстве $L_2(\Gamma)$, то эта функция интерполирует функцию f в точке $z=0$ кратности не меньше чем $n-m+1$ и один раз в каждой точке $1/\bar{a}_k$, $k=1,\ldots,m$; тем самым эта функция является единственной.

В общем случае, когда полюсы аппроксимирующей функции уже не фиксированы, происходит удвоенная интерполяция в точках, инверсных конечным полюсам функции $R_{n,m}(f, L_2, \Gamma)$ относительно окружности Γ. Впервые на этот факт обратил внимание В. Д. Ерохин. Из результатов Ерохина нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма Ерохина. *Пусть $f\in H_2(\Gamma)$ и (n, m) — фиксированная пара натуральных чисел, $n\geqq m$. Тогда функция $R_{n,m}=R_{n,m}(f, L_2, \Gamma)$ имеет ровно m конечных полюсов $\alpha_{n,1},\ldots,\alpha_{n,m}$ и интерполирует функцию f в начале координат кратности $n-m+1$ и два раза в каждой точке $1/\bar{\alpha}_{n,k}$, $k=1$ $2,\ldots,m$.*

Пусть μ — фиксированное натуральное число и $c=(c_1,\ldots,c_\mu)$ — μ точек, $|c_i|\leqq|c_{i+1}|<1$, $i=1,\ldots,\mu-1$. Для любой фиксированной пары (n, m) натуральных чисел, $n+m+1>\mu$ обозначим через $\pi^c_{n,m,\mu}$ рациональную функцию из класса $\Pi_{n,m}$, числитель $p^c_{n,m}$ и знаменатель $q^c_{n,m}$, $q^c_{n,m}\neq 0$, которой удовлетворяют соотношению

$$(fq^c_{n,m}-p^c_{n,m})(z)=\prod_{k=1}^{\mu}(z-c_k)\,.\,z^{n+m+1-\mu}\varphi_{n,m,\mu}(z),$$

где $\varphi_{n,m,\mu}$ — функция, голоморфная в круге D. Нетрудно проверить, что полиномы $p^c_{n,m}$ и $q^c_{n,m}$ всегда существуют и, хотя и не определены однозначно, функция $\pi^c_{n,m,\mu}$ единственна. В дальнейшем будем предполагать, что $p^c_{n,m}$ и $q^c_{n,m}$ взаимно просты и коэффициент перед старшей степенью полинома $q^c_{n,m}$ равен единице.

С учетом леммы Ерохина видно, что определенная выше функция $R_{n,m}$ является частным случаем указанной конструкции, а импликация 2. $\Longrightarrow$ 1. — частным случаем следующей теоремы общего интерполяционного характера:

Теорема 3. *Пусть $f\in H_2(\Gamma)$ и m, μ — фиксираванные натуральные числа. Пусть $a=\{a_1,\ldots,a_\mu\}$, $a(n)=\{a_1^{(n)},\ldots,a_\mu^{(n)}\}$, $n>\mu-m-1$ μ — мерные точки, $|a_i|\leqq|a_{i+1}|<1$, $i=1,\ldots,\mu-1$, связанные соотношением $\limsup\limits_{n\to\infty}\|a-a(n)\|^{1/n}\leqq q<1$, где $\|a-a(n)\|=\max\{|a_i-a_i^{(n)}|,\ i=1,\ldots\mu\}$.*

Если существует полином $q_m\in\Pi^*_m$, $q_m(z)=\Pi_{i=1}^m(z-\alpha_i)$, $|\alpha_i|>1$, $i=1$, $\ldots,m$ такой, что выполняется соотношение

$$\limsup_{n\to\infty}\|q^{(a(n))}_{n,m}-q_m\|^{1/n}\leqq q_2<1,$$

то $f\in M_m(D_{M/q})$, где $M=\max\{|\alpha_i|,\ i=1,\ldots,m\}$, $q=\max(q_1, q_2)$ и все точки $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ — полюсы f в круге $D_{M/q}$.

Стоит отметить, что самое естественное доказательство утверждения 1. $\Longrightarrow$ 2. в пространстве $L_2(\Gamma)$ есть применение леммы Ерохина и теоремы Саффа см. [4]; также [5; 6].

В связи с наилучшими приближениями в $L_p(\Gamma_\varrho)$, $p \geqq 1$, $\varrho > 0$, представляет интерес следующая теорема Уолша [7; 8]: если (n, m) — фиксированная пара натуральных чисел, f — голоморфная в нуле функция, заданная своим разложением в $z=0$, и $p \geqq 1$ — фиксированное натуральное число, то последовательность $R_{n,m}(f, L_p, \Gamma_\varrho)$ сходится при $\varrho \to 0$ в области голоморфности функции f. Предельная функция $\pi_{n,m}(f) = \pi_{n,m} \in \Pi_{n,m}$ осуществляет наилучшее касание с функцией f в точке $z=0$ в классе $\Pi_{n,m}$, т. е. предельная функция $\pi_{n,m}$ последовательности $R_{n,m}(f, L_p, \Gamma_\varrho)$ при $\varrho \to 0$ совпадает с (единственной) классической функцией Паде типа (n, m); (о классических аппроксимациях Паде см. [9]).

Доказательство теоремы 3. Заметим, что в условиях теоремы функция f не может быть рациональной, имеющей наиболее $m-1$ полюсов $\neq 0$. Действительно, в таком случае для всех достаточно больших n функция $\pi_{n,m,\mu}^{a(n)}$ совпадала бы с самой функцией f и тогда не существовал бы полином q_m с указанным в теореме 3 свойством.

Доказательству предпошлем следующую лемму.

Лемма (Уолш). *Пусть функция φ голоморфна в D $(\varphi \in \mathscr{H}(D))$ и $\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — бесконечная последовательность комплексных точек β_k, $|\beta_k| \leqq b < 1$, $k=1, 2, \ldots$, удовлетворяющие соотношению $\lim \Pi_{k=1}^{n} |z-\beta_k|^{1/n} = |z|$ равномерно вне D. Тогда внутри D функция φ допускает разложение в равномерно сходящийся интерполяционный ряд Ньютона по последовательности β:*

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu \sum_{\tau=1}^{\nu} (z-\beta_\tau).$$

Коэффициенты φ_ν этого разложения задаются формулами

$$\varphi_\nu = (1/2\pi i) \int_{|t|=b+\varepsilon} \varphi(t) \prod_{l=1}^{\nu+1} (t-\beta_l)^{-1}\, dt, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $b+\varepsilon < 1$, $\varepsilon > 0$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\varphi \in \mathscr{H}(D_\varrho)$, $\varrho > 1$, является выполнение соотношения $\lim\sup |\varphi_\nu|^{1/\nu} \leqq \varrho^{-1}$; $\sigma = \max\{\varrho, \varphi \in \mathscr{H}(D_\varrho)\}$ тогда и только тогда, когда $\lim\sup_{\nu\to\infty} |\varphi_\nu|^{1/\nu} = \sigma^{-1}$.

Доказательство этой леммы содержится, например, в [2, гл. 3].

Доказательство теоремы 3 состоит из двух частей; сначала покажем, что функция f допускает продолжение до $\widetilde{m}$-мероморфной функции в круге $D_{M/q}$, где $M = \max\{|\alpha_i|, i=1, \ldots, m\}$ и $q = \max(q_1, q_2)$, которая может иметь полюсы только в точках $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Последнее эквивалентно тому, что функция $F = fq_m$ продолжается до голоморфной функции в круге $D_{M/q}$ $(F \in \mathscr{H}(D_{M/q}))$. После этого установим, что каждая точка $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — действительный полюс функции f.

Пусть $\varrho = \max\{r, F \in \mathscr{H}(D_r)\}$. Так как по условию $f \in H_2(\Gamma)$, то $\varrho \geqq 1$. Допустим, что $\varrho < M/q$.

Ясно, что все полюсы рассматриваемой функции f, лежащие в D_ϱ (если такие имеются), находятся среди точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$*. Пусть ω — полином с

*Точнее, среди тех точек $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, которые лежат в круге D_ϱ.

коэффициентом перед старшей степенью единицей, имеет свои корни в полюсах функции f в круге D_ϱ и только в этих точках. Если в круге D_ϱ функция f голоморфна, то положим $\omega\equiv 1$; очевидно $\omega\in\Pi_m$. Рассмотрим сначала случай, когда $\deg\omega=m_1<m$. Тогда по необходимости ϱ будет не больше, чем $M=(\max\{|a_i|,\ i=1,\ldots,m\})$ и функция $\widetilde{F}=f\omega\in\mathcal{H}(D_\varrho)$. Из определения функции $\pi^{a(n)}_{n,m,\mu}$ следует, что для $n\geqq N$ (всюду в дальнейшем $q^{a(n)}_{n,m}=q_{n,m}$, $p^{a(n)}_{n,m}=p_{n,m}$)

$$(3)\qquad (fq_{n,m}-p_{n,m})(z)=\prod_{\nu=1}^{\mu}(z-a_\nu^{(n)})\cdot z^{n+m+1-\mu}\sum_{k\geqq 0}f_{n+m+1+k}z^k,$$

где f ... — коэффициенты в разложении функции $fq_{n,m}$ в интерполяционный ряд Ньютона по последовательности $\mathfrak{z}^{(n)}=(a_1^{(n)},\ldots,a_\mu^{(n)},0,0,\ldots)$. Умножение в равенстве (3) на полином степени не выше m не изменит характер правой стороны. Учитывая это замечание, нетрудно проверить, что

$$(4)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\varrho-\varepsilon}\frac{(\widetilde{F}q_m)(t)\,dt}{t^{n+m+1-\mu}\prod_{\nu=1}^{\mu}(t-a_\nu^{(n)})}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\varrho-\varepsilon}\frac{\widetilde{F}(t)(q_m-q_{n,m})(t)}{t^{n+m+1-\mu}\prod_{\nu=1}^{\mu}(t-a_\nu^{(n)})}\,dt,$$

где в качестве $\varepsilon<0$ выбрано произвольное положительное число, такое, что $\varepsilon\not<\varrho-1$. Пусть $\theta>0$ — произвольное вещественное число. Из условия теоремы 3 вытекает существование такого индекса N_1, $N_1\geqq N$, $N_1=N_1(\theta,\ \varepsilon,\ f)$, что для всех $n\geqq N_1$ справедливы оценки

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\varrho-\varepsilon}\frac{\widetilde{F}(t)(q_m-q_{n,m})(t)\,dt}{t^{n+m+1-\mu}\prod_{\nu=1}^{\mu}(t-a_\nu^{(n)})}\right|\leqq C_1\left(\frac{q_1\cdot e^\theta}{\varrho-\varepsilon}\right)^n$$

и

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\varrho-\varepsilon}\frac{\widetilde{F}(t)\,q_m(t)}{t^{n+m+1-\mu}}\left(\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{\mu}(t-a_\nu^{(n)})}-\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{\mu}(t-a_\nu)}\right)dt\right|\leqq C_2\left(\frac{q_2e^\theta}{\varrho-\varepsilon}\right)^n.$$

Здесь и всюду в дальнейшем $C_1, C_2,\ldots$ обозначают положительные константы, не зависящие от n.

Объединяя последние оценки, из (4) получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\varrho-\varepsilon}\frac{\widetilde{F}(t)q_m(t)\,dt}{t^{n+m+1-\mu}\prod_{\nu=1}^{\mu}(t-a_\nu^{(n)})}\right|\leqq C_3\left(q\frac{e_\theta}{\varrho-\varepsilon}\right)^n.$$

Последнее означает, что

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\varrho-\varepsilon}\frac{\widetilde{F}(t)q_m(t)\,dt}{t^{n+m+1-\mu}\prod_{\nu=1}^{\mu}(t-a_\nu)}\right|^{1/n}\leqq\frac{q}{\varrho-\varepsilon}.$$

Из произвольности выбора числа ε следует, что функция $\widetilde{F}q_m=f\cdot\omega\cdot q_m$ продолжается до голоморфной во всем круге $D_{\varrho/q}$ (сравни с леммой); в качестве последовательности $\beta=\{\beta_1,\beta_2,\ldots\}$ мы взяли последовательность $\mathfrak{z}=\{a_1,\ldots,a_\mu,0,0,\ldots\}$. Но так как полином q_m делится на полином ω, а функция $\widetilde{F}=f\omega\in\mathcal{H}(D_\varrho)$ по предположению, то полученный результат означает, что F

$=fq_m \in \mathcal{H}(D_{\varrho/q})$. Однако последнее противоречит сделанному предположению о числе ϱ (напомним, что по предположению $\varrho = \max\{r,\ F \in \mathcal{H}(D_r)\}$).

Случай, когда $\deg \omega = m$ (ясно, что тогда $\varrho \in (M,\ M/q)$) сводится к предыдущим рассуждениям, путем рассматривания функции $F^*(t) = f(t) \prod_{|a_i|<M} (t-a_i)$ в области $D_{\varrho'}$, где $\varrho' \in (\max\{|a_i|,\ |a_i|<M\},\ M)$. В результате получаем, что $F \in \mathcal{H}(D_{\varrho'/q})$. Потом, устремляя ϱ' к M, получим противоречие с предположением о числе ϱ. В обоих случаях это противоречие означает, что функция F продолжается по голоморфной функции в круге $D_{M/q}$.

Для функции f тогда существуют две возможности: иметь в круге $D_{M/q} \leq m-1$ полюсов или иметь в круге $D_{M/q}$ ровно m полюсов (которые должны совпадать с точками $a_1, \ldots, a_m$).

Допустим, что имеет место первая возможность и пусть полином ω определен как выше ($\deg \omega \leq m-1$). Функция $\widetilde{F} = f\omega$ будет тогда голоморфной в круге $D_{M/q}$. Как и в предыдущей части доказательства, устнавливается, что при сделанном предположении ($\widetilde{F} \in \mathcal{H}(D_{M/q})$) функция $\widetilde{F} \in \mathcal{H}(D_{M/q^N})$ для любого натурального числа N. Последний вывод означает, что функция $\widetilde{F}$ — целая. Тогда ее коэффициенты $\widetilde{F}_n$, $n=0, 1, 2, \ldots$ в разложении в интерполяционный ряд Ньютона по последовательности $\mathfrak{z} = \{a_1, \ldots, a_\mu, 0, 0, \ldots\}$

$$\widetilde{F}(z) = \widetilde{F}_0 + \sum_{\nu-1}^{\mu-1} \widetilde{F}_\nu \prod_{k=1}^{\nu} (z-a_k) + \prod_{k=1}^{\mu} (z-a_k) \sum_{k \geq \mu}^{\mu} \widetilde{F}_k z^{k-\mu}$$

удовлетворяют соотношению

$$\lim_{n\to\infty} |\widetilde{F}_n|^{1/n} = 0. \tag{5}$$

Пусть $\theta_1 > 0$. Из сходимости μ-мерных точек $a^{(n)}$ при $n \to \infty$ к точке $a = (a_1, \ldots, a_\mu)$ вытекает существование такого индекса N_2, $N_2 \geq N_1$, что для всех $n > N_2$ справедлива оценка

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(1 - \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{t-a_\nu}{t-a_\nu^{(n)}}\right) t^{k-1} dt \right| \leq \theta_1, \tag{6}$$

где $k = 1, 2, \ldots$

В окрестности бесконечно удаленной точки функция ψ_n, $\psi_n(z) = 1 - \prod_{\nu=1}^{\mu} (z-a_\nu)/(z-a_\nu^{(n)})$ имеет Тейлоровское разложение $\psi_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{n,k}/z^k$ (здесь, очевидно, $\limsup_{k\to\infty} |\psi_{n,k}|^{1/k} = \max_{\nu=1} |a_\nu^{(n)}|$ для любого n. Согласно (6) имеем $|\psi_{n,k}| \leq \theta_1$ для $k = 1, 2, \ldots$ и всех $n > N_2$.

Из (3) следует дальше, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\widetilde{F}(t) q_{n,m}(t)\, dt}{t^{n+m+1-\mu} \prod_{\nu=1}^{\mu} (t-a_\nu^{(n)})} = 0.$$

Из этого соотношения с помощью элементарных преобразований получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\widetilde{F}(t) q_{n,m}(t)}{t^{n+m+1-\mu} \prod_{\nu=1}^{\mu} (t-a_\nu)} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{n,k} \int_\Gamma \frac{\widetilde{F}(t) q_{n,m}(t)}{t^{n+m+1-\mu+k} \prod_{\nu=1}^{\mu} (t-a_\nu)}\, dt.$$

Заменяя здесь полином $q_{n,m}$ его представлением $q_{n,m}(z)=z^m+\ldots+c_{n,m}$, подходим к окончательному результату:

$$(7)\qquad \widetilde{F}_n=\sum_{k=1}^{m}\widetilde{F}_{n+k}\Big(\sum_{i=1}^{m}\psi_{n,k-i}\,c_{n,i}-c_{n,k}\Big)+\sum_{k\geq m+1}\widetilde{F}_{n+k}\sum_{i=0}^{m}\psi_{n,k-i}\,c_{n,i}=\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{F}_{n+k}B_{n+k},$$

(здесь $\psi_{n,-l}=0$ для $l\geq 0$).

Определим число A следующим образом: $A=(\theta_1+1)(m+1)\max\{1,\lim\limits_{n\to\infty}|c_{n,k}|\ k=1,\ldots n\}$. Из сходимости последовательности $c_{n,k}$ при $n\to\infty$, $k=1,2,\ldots,m$ и из (6) вытекает существование такого индекса N_3, $N_3\geq N_2$, что $|B_{n,k}|\leq A$ для $k=1,2,3,\ldots$ Из (5) следует дальше, что, начиная с некоторого N_4, $N_4\geq N_3$, для $n\geq N_4$ справедивы оценки: $|\widetilde{F}_n|\leq C_3(2A+1)^{-n}$.

Пусть в (7) индекс n больше, чем N_4. Для $\widetilde{F}_n$ дальше имеем

$$|\widetilde{F}_n|\leq A\sum_{k=1}^{\infty}|\widetilde{F}_{n+k}|=A\Big(|\widetilde{F}_{n+1}|+\sum_{k=2}^{\infty}|\widetilde{F}_{n+k}|\Big).$$

Применяя для $\widetilde{F}_{n+1}$ те же оценки, как и для $\widetilde{F}_n$ и подставляя их в последнее неравенство, получаем для $\widetilde{F}_n$: $|\widetilde{F}_n|\leq A(A+1)\sum\limits_{k\geq 2}|\widetilde{F}_{n+k}|$.

Пусть N — произвольное натуральное число. Оценивая $N+1$ раз коэффициент $\widetilde{F}_n$ указанным способом, получаем окончательный результат:

$$|\widetilde{F}_n|\leq A(1+A)^N\sum_{k\geq N+1}|\widetilde{F}_{n+k}|<C_4\cdot A\Big(\frac{1+A}{1+2A}\Big)^N\frac{1}{(1+2A)^n}$$

(здесь мы учли (8)). Устремляя затем число N к бесконечности, увидим что $\widetilde{F}_n=0$ для всех достаточно больших n. Но это означает, что функция f рациональна и имеет не более, чем $m-1$ конечных полюсов $\neq 0$ в комплексной плоскости.

Однако последнее, как мы увидели, противоречит условию теоремы 3 (см. замечание в начале доказательства теоремы 3). Тогда $f\in M_m(D_{M/q})$ и имеет полюсы во всех точках $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$.

На этом теорема 3 и, тем самым, импликация 2. $\Rightarrow$ 1. полностью доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. L. Walsh. The convergence of approximating rational functions of prexribed type. Доклады Международной конференции по современным проблемам функций комплексного переменного, Ереван, май 1966.
2. Дж. Л. Уолш. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной плоскости. Москва, 1961.
3. В. Д. Ерохин. О наилучших приближениях аналитических функций посредством рациональных. *Доклады АН СССР*, **128**, 1959, 29—32.
4. E. B. Saff. An extension of R. de Montessus de Ballore theorem of the convergence of interpolating rational functions. *J. Approxim. Theory*, **6**, 1972, 63—68.
5. А. А. Гончар. Об одной теореме Саффа. *Мат. сб.*, **94**, 1974, 152—197.
6. E. B. Saff. Regions of meromorphy determined by the degree of best rational approximation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **29**, 1971, 32—38.

7. J. L. Walsh. Pade Approximants as limits of rational functions of best approximation *J. Approxim. Theory*, **13**, 1964, 305—312.
8. Ch. Chui. Pade approximants as limits of rational functions of best approximation. *J. Approxim. Theory*. 12, 1974, 201—204.
9. O. Perron. Die Lehre von den Kettenbrüchen, B. II, Stuttgart, 1964.

Поступила 27. 1. 1978.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373