

Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

PLISKA

STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Pliska Studia Mathematica Bulgarica
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~pliska/>
or contact: Editorial Office

Pliska Studia Mathematica Bulgarica
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: pliska@math.bas.bg

FAMILLES NORMALES DE FONCTIONS PRESQUE-HOLOMORPHES

OLEG K. MUSHKAROV

On prouve un théorème de type Vitali pour les fonctions presque-holomorphes sur les variétés presque-complexes.

Introduction. Soit (X, J) une variété presque-complexe de dimension réelle $2n$, c'est-à-dire une variété réelle indéfiniment différentiable de dimension $2n$, munie d'une structure presque-complexe J . Pour une fonction f à valeurs complexes définie sur X , on dit qu'elle est presque-holomorphe si elle est continûment différentiable (de classe \mathcal{C}^1) et si pour tout $x \in X$, on a $f_{*,x} \circ J_x = i f_{*,x}$, où $f_{*,x}$ est la différentielle de f au point x . Dans le cas où J est une structure presque-complexe intégrable, la notion de fonction presque-complexe coïncide avec celle de fonction holomorphe [1]. On désignera par $AH(X)$ l'espace des fonctions presque-holomorphes définies sur (X, J) .

Dans cet article on étudie la topologie de l'espace $AH(X)$. Le but est d'établir le théorème bien connu de Vitali pour les fonctions presque-holomorphes. On sait que le théorème de Vitali a été l'objet de différentes généralisations (par exemple [5]). Notre théorème peut être considéré comme une généralisation dans une autre direction.

L'auteur remercie S. Dimiev pour le thème proposé.

1. Rappel des définitions. Soit $T(X)_\mathbb{C}$ la complexification du fibré tangent de la variété presque-complexe (X, J) $T(X)_\mathbb{C} = T(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Alors l'opérateur J peut être prolongé jusqu'à un automorphisme fibré \mathbb{C} -linéaire de $T(X)_\mathbb{C}$ (pour tout $x \in X$, on a $J(x): T_x(X) \rightarrow T_x(X)$ et $J_{(x)}^2 = -1_{T_x(X)}$). Pour la complexification du fibré cotangent $T^*(X)_\mathbb{C}$ on a la décomposition

$$(1.1) \quad T^*(X)_\mathbb{C} = T^*(X)^{1,0} \oplus T^*(X)^{0,1},$$

où $T^*(X)^{1,0}$ est le fibré conjugué du fibré $T(x)^{1,0}$ des sous-espaces correspondant à la valeur caractéristique i de J ; respectivement $T^*(X)^{0,1}$ est le fibré conjugué du fibré $T(x)^{0,1}$ des sous-espaces correspondant à la valeur caractéristique $-i$ de J . Les sections indéfiniment différentiables globales de $T^*(X)^{(1,0)}$ s'appellent des formes de type $(1, 0)$, respectivement celles de $T^*(X)^{0,1}$ sont des formes de type $(0, 1)$. Les sections analogues de $T^*(X)_\mathbb{C}$ sont les formes à valeurs complexes sur X . Si ω est une forme de type $(1, 0)$, $\bar{\omega}$ est une forme de type $(0, 1)$. Grâce à l'égalité (1.1), toute forme sur X est décomposée en somme uniquement déterminée de formes de type $(1, 0)$ et de formes de type $(0, 1)$.

Pour les $(0, 1)$ -formes $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n$, on dit qu'elles sont des formes structurales au point $x_0 \in X$, s'il existe un voisinage U de x_0 , tel que $\bar{\omega}_1(x)$,

$\bar{w}_2(x), \dots, \bar{w}_n(x)$ est une base pour $T_x^*(x)^{0,1}$ quelque soit x de U . C'est-à-dire toute $(0, 1)$ -forme sur U est une combinaison linéaire (à coefficients fonctions indéfiniment différentiables sur U) des formes $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n$. Comme $T^*(X)_c$ est un fibré localement trivial, il existe toujours des repères locaux et par conséquence des formes structurales [2].

A tout système de formes structurales on associe des opérateurs différentiels de premier ordre. En effet, si u est une fonction continûment différentiable sur U , alors du est une 1-forme et comme il suit de (1.1) on a

$$(1.2) \quad du = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial w_j} \bar{w}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar{w}_j} \bar{w}_j.$$

Comme la décomposition (1.2) est uniquement déterminée, ses coefficients sont bien définis et les applications $u \rightarrow \partial u / \partial w_j$, $u \rightarrow \partial u / \partial \bar{w}_j$ peuvent être considérées comme des opérateurs différentiels, notés ordinairement $\partial / \partial w_j$ et $\partial / \partial \bar{w}_j$. Ces opérateurs s'expriment en termes des coordonnées locales à l'aide des composantes de J , mais dans la suite nous aurons besoin seulement de leurs propriétés suivantes:

a) $\partial / \partial w_j$ et $\partial / \partial \bar{w}_j$ sont des opérateurs différentiels linéaires de premier ordre.

b) Si u est une fonction continûment différentiable (de classe \mathcal{C}^1) on a $\partial \bar{u} / \partial \bar{w}_j = \partial u / \partial w_j$.

c) Tout opérateur différentiel linéaire de premier ordre est une combinaison linéaire (à coefficients indéfiniment différentiables) de $\partial / \partial w_j$ et $\partial / \partial \bar{w}_j$, $j=1, 2, \dots, n$.

A l'aide des formes structurales on peut décrire les fonctions presque-holomorphes.

Lemme 1.1. *Soit $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Alors f est presque-holomorphe si et seulement si pour tout système de formes structurales $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n$ on a $\partial f / \partial \bar{w}_j = 0$, $j=1, 2, \dots, n$.*

En effet, si f est presque-holomorphe, df est une forme de type $(1, 0)$. Il reste de prendre en vue (1.1).

Corollaire 1.1. *L'espace $AH(X)$ est une algèbre sur \mathbb{C} .*

2. Une estimation fondamentale. Etant donnée une variété presque-complexe (X, J) de dimension réelle $2n$, soit U le domaine de définition d'une carte (système de coordonnées locales de X). On désignera par $L^2(U, \text{loc})$ l'espace des fonctions à valeurs complexes, définies sur U , de carré localement intégrable. Respectivement, soit $W^s(U, \text{loc})$ l'espace des fonctions définies sur U , dont les dérivées (dans le sens des distributions) d'ordre inférieur ou égal à s sont de carré localement intégrable [3]. Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n})$ est un multi-index, par D^α on désignera la dérivée partielle $\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n}} / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_{2n}^{\alpha_{2n}}$. Dans la suite on emploiera le lemme suivant [4].

Lemme 2.1. *Soient $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n$ les formes structurales du domaine U et $u \in L^2(U, \text{loc})$. Si s est un entier positif et $\partial u / \partial \bar{w}_j \in W^s(U, \text{loc})$, $j=1, 2, \dots, n$, alors $u \in W^{s+1}(U, \text{loc})$. Si K est un sous-ensemble compact de U et U' est un voisinage de K dans U ($K \subset U' \subset U$), on a l'estimation suivante:*

$$(2.1) \quad \sum_{|\alpha| \leq s+1} \int_K |D^\alpha u|^2 dx \leq C \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \sum_{j=1}^n \int_{U'} |D^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{w}_j} \right)|^2 dx + \int_{U'} |u|^2 dx \right)$$

où C est une constante, qui ne dépend pas de la fonction u .

Une conséquence immédiate du lemme 2.1 est la proposition suivante

Corollaire 2.1. *Toute fonction presque-holomorphe est indéfiniment différentiable.*

En effet, soit x_0 un point arbitraire de X . On choisit un voisinage de x_0 contenu dans le domaine de définition d'une carte U en x_0 , munie des formes structurales $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n$. Si f est presque-holomorphe sur X , alors l'expression locale de f sur U est de classe \mathcal{C}^1 , ce qui implique $f \in L^2(U, \text{loc})$. D'autre part, d'après le lemme 2.1 on a $\partial f / \partial \bar{w}_j = 0, j=1, 2, \dots, n$, c'est-à-dire pour tout entier positif s , on a $\partial f / \partial \bar{w}_j \in W^s(U, \text{loc})$. En employant le lemme 2.1 et le lemme de Sobolev on déduit que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur U , ce qui achève la démonstration.

Estimation fondamentale 2.1. *Soient f une fonction presque-holomorphe sur X et U un ouvert de X contenu dans le domaine de définition d'une carte de X . Si K est une partie compacte de U et U' est un voisinage de K contenu dans U ($K \subset U' \subset U$), pour tout multi-index α on a l'inégalité*

$$(2.2) \quad \sup_K |D^\alpha f| \leq C_\alpha \int_{U'} |f|^2 dx$$

où C_α est une constante qui ne dépend pas du choix de la fonction f .

Démonstration. Il suffit de prendre en vue (2.1), les conditions $\partial f / \partial \bar{w}_j = 0, j=1, 2, \dots, n$, et l'inégalité $\sup |u| \leq \int |\partial^{2n} u / \partial x_1 \dots \partial x_{2n}| dx$ où u est une fonction indéfiniment différentiable sur \mathbf{R}^{2n} à support compact.

3. L'espace $AH(X)$. On montrera ici que la topologie naturellement liée avec l'espace $AH(X)$ est la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de X .

Théorème 3.1. *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions presque holomorphes sur X . Supposons qu'elle est convergente uniformément sur toute partie compacte de X . On affirme que la limite f de la suite considérée est aussi une fonction presque-holomorphe sur X .*

Démonstration. D'abord on remarquera que la limite f est une fonction continue sur X . Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que $f \in \mathcal{C}^1$ et encore, que pour tout point $x_0 \in X$ et pour tout système de formes structurales $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n$ en x_0 , on a $\partial f / \partial \bar{w}_j = 0, j=1, 2, \dots, n$.

Soit K un voisinage compact de x_0 et U' un voisinage compact de K , contenu dans le domaine de définition U d'une partie de X . A l'aide de l'inégalité (2.2) on obtient :

$$\sup_K |D^\alpha f_n - D^\alpha f_m| \leq C_\alpha \int_{U'} |f_n - f_m|^2 dx$$

où C_α ne dépend pas de n et m . Alors, il suit que pour tout $\alpha, |\alpha|=1$, la suite des dérivées $\{D^\alpha f_n\}$ est uniformément convergente sur les parties compactes de U . Ainsi on voit que les dérivées partielles de f de premier ordre sont continues dans le voisinage U de x_0 et que la suite $\{D^\alpha f_n\}$ converge vers $D^\alpha f$. Il reste de prendre en vue que $\partial / \partial \bar{w}_j$ sont des combinaisons linéaires à coef-

ficients indéfiniment différentiables des dérivées D^α , $|\alpha|=1$. On a $\partial f/\partial \bar{w}_j = 0$ parce que pour tout $x \in U$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{w}_j}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n}{\partial \bar{w}_j}(x) = 0$$

en vue que $f_n \in AH(X)$.

Dans la suite on supposera que X est une réunion dénombrable de parties compactes et que $AH(X)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de X . A l'aide de raisonnements standards on déduit du théorème 3.1 l'assertion suivante

Corollaire 3.1. *L'espace $AH(X)$ est une algèbre de Fréchet.*

Théorème 3.2. *Tout suite de fonctions presque-holomorphes qui est uniformément bornée, contient une sous-suite qui est uniformément convergente sur les parties compactes de X .*

Corollaire 3.2. *Les parties compactes de $AH(X)$ sont les familles fermées et uniformément bornées de fonctions presque-holomorphes sur X .*

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Helgason. Differential geometry and symmetric spaces. New York, 1962.
2. R. O. Wells. Differential analysis on complex manifolds. New York, 1973.
3. W. Rudin. Functional analysis. New York, 1973.
4. L. Hörmander. An introduction to complex analysis in several variables. New York, 1966.
5. R. C. Gunning. On Vitali's theorem for complex spaces with singularities. *J. Math. Mech.*, 8, 1959, 133—142.

Centre for Mathematics and Mechanics
1090 Sofia P. O. Box 373

Reçu le 24. 11. 1978