PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

О СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ВЛАДИМИР Х. ХРИСТОВ

Для любой вещественной, конечной и 2π-периодической функции f получены через характеристики $\omega_k(f;\ \delta)_{L^p}$ и $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$ функции f оценки для величин

$$\| I_{n,\nu}(f;\ x)-f(x)\|_{L^p(l^p_{2n+1})}(1<p<\infty),$$

где $I_{n,\nu}(f;\ x)$ — ν-тая частичная сумма интерполяционного полинома $I_n(f;\ x)$ функции f, построенного по $2n+1$ равноотстоящим узлам периода.

Пусть f — вещественная, конечная и 2π-периодическая функция и пусть $I_n(f;\ x)$ — интерполяционный тригонометрический полином порядка n функции f (см. [1, т. II, с. 10]), совпадающий с ней в точках

$$x_j^{(n)}=2\pi j/(2n+1),\quad j=0,\ 1,\ldots,\ 2n. \tag{1}$$

Частичную сумму порядка ν ($\nu\leqq n$) полинома $I_n(f;x)$ будем обозначать через $I_{n,\nu}(f;\ x)$. В частности, $I_{n,n}(f;\ x)\equiv I_n(f;\ x)$.

Для любого $p\in[1,\ \infty)$, как обычно, интегральную норму функции g определяем через выражение $\|g\|_{L^p}=\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(t)|^p dt\}^{1/p}$, а дискретную — выражением

$$\|g\|_{l^p_{2n+1}}=\{\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}|g(\xi_j)|^p\}^{1/p}, \tag{2}$$

где точки ξ_j, $j=0,\ 1,\ldots,\ 2n$ в наших рассмотрениях всегда будут равноотстоящими на периоде, т. е. $\xi_j-\xi_{j-1}=2\pi/(2n+1)$, $j=1,\ 2,\ldots,\ 2n$, и это не будем специально оговаривать в дальнейшем.

Известно (см. [1, т. II, с. 45, 50], [2]) что для любой ограниченной и интегрируемой по Риману функции f и для любого $p\in[1,\ \infty)$ величина

$$\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p} \tag{3}$$

стремится к нулю, когда $n\geqq\nu\to\infty$.

Цель настоящей статьи охарактеризовать величину (3), а также и величину

$$\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{l^p_{2n+1}} \tag{4}$$

как функции параметров n и ν в зависимости от структурных свойств функции f для случая $p\in(1,\ \infty)$. Точнее, получены оценки для (3) и (4) через интегральный модуль непрерывности $\omega_k(f;\ \delta)_{L^p}$ и через усредненный по

ПЛИСКА Български математически студии. Том 5, 1983, с. 14—22.

норме в L^p локальный модуль непрерывности функции f (в п. 1, 2 эти результаты формулируются). Последняя характеристика функции f (обозначается через $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$) хорошо известна и использовалась разным авторами для характеризации различных аппроксимационных процессов (об истории этой характеристики и возможностей ее применений см. [3—6]). В п. 3, учитывая некоторые свойства модуля $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$, из результатов п. 1 и 2 получены некоторые следствия. В п. 4 доказываются сформулированные утверждения.

Припомним определение характеристики $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$ функции f. Следуя Попову и Андрееву [6], для любого $p \geqq 1$, k-натурального и $\delta > 0$ определяем

$$\tau_k(f;\ \delta)_{L^p} = \| \omega_k(f;\ x,\ \delta) \|_{L^p},$$

где $\omega_k(f;\ x,\ \delta) = \sup \{ |\Delta_h^k f(t)|;\ t,\ t+kh \in [x-k\delta/2,\ x+k\delta/2] \}$ и $\Delta_h^k f(t) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(t+jh)$.

Напомним еще и определение интегрального модуля непрерывности $\omega_k(f;\ \delta)_{L^p}$ функции f порядка k в норме L^p:

$$\omega_k(f;\ \delta)_{L^p} = \sup \{ \| \Delta_h^k f(t) \|_{L^p} : |h| \leqq \delta \} \quad (\delta > 0).$$

Отметим, что везде в дальнейшем константы (может быть и разные) будем обозначать всегда через C, C_k, $C_{k,p}$, указывая индексами лишь от каких параметров они зависят. Константы всегда положительны.

1. Случай интегральной нормы. Справедлива

Теорема 1. *Пусть f — конечная и интегрируемая по Риману функция, $p \in (1,\ \infty)$ и ν, k, n — натуральные числа, $\nu \leqq n$. Тогда для любого $h \geqq 2\pi/(2n+1)$ имеет место неравенство*

$$\| f - I_{n,\nu}(f) \|_{L^p} \leqq C_{k,p} (\tau_k(f;\ h)_{L^p} + (\nu h)^{-k} \omega_k(f;\ h)_{L^p}). \tag{5}$$

Из последнего утверждения, учитывая, что [6]

$$\omega_k(f;\ \delta)_{L^p} \leqq \tau_k(f;\ \delta)_{L^p}, \quad \tau_k(f;\ \lambda\delta)_{L^p} \leqq (1+c\lambda)^{C_k} \tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$$

($0 < \lambda$ — действительно), и полагая h последовательно равным $2\pi/(2\nu+1)$ и $2\pi/(2n+1)$, получаем, что имеет место

Теорема 1'. *В условиях теоремы 1 справедливы оценки*

$$\| f - I_{n,\nu}(f) \|_{L^p} \leqq C_{k,p}\, \tau_k(f;\ 1/\nu)_{L^p}, \tag{6}$$

$$\| f - I_{n,\nu}(f) \|_{L^p} \leqq C_{k,p} (\tau_k(f;\ 1/n)_{L^p} + (n/\nu)^k \omega_k(f;\ 1/n)_{L^p}).$$

Пусть $\tilde{f}$ — сопряженная функции f, а $\tilde{I}_{n,\nu}(f;\ x)$ — ν-тая частичная сумма сопряженного интерполяционного полинома $\tilde{I}_n(f;\ x)$ функции f по узлам (1) (см. [1, т. II, с. 44, 12]). Из теоремы Рисса (см. 1, т. I, с. 404]) получаем ($1 < p < \infty$) $\| \tilde{f} - \tilde{I}_{n,\nu}(f) \|_{L^p} \leqq C_p \| f - I_{n,\nu}(f) \|_{L^p}$ и, следовательно, справедлива

Теорема 2. *Для любой конечной и интегрируемой по Риману функции f выполнено*

$$\| \tilde{f} - \tilde{I}_{n,\nu}(f) \|_{L^p} \leqq C_{k,p} (\tau_k(f;\ h)_{L^p} + (\nu h)^{-k} \omega_k(f;\ h)_{L^p}), \tag{7}$$

где p, ν, k, n и h — как в теореме 1.

Следующее утверждение является в некотором смысле обратным к полученным оценкам (5) и (6). Оно показывает, что характеристика $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$ хорошо улавливает порядок убывания величины (3) для дифференцируемых функций.

Т е о р е м а 3. *Пусть k, m, n и ν — натуральные и такие, что $2^m \leqq \nu < 2^{m+1} \leqq n$. Тогда для $1 \leqq p < \infty$ и для любой функции f с абсолютно непрерывной $(k-1)$-вой производной и $f^{(k)} \in L_p$ имеет место неравенство*

$$\tau_{k+1}(f;\ 1/\nu)_{L^p} \leqq C\nu^{-k} \| I_{n,2^{m+1}}(f^{(k)}) - f^{(k)} \|_{L^p}$$

$$+ C\nu^{-k-1}\{ \| I_{n,0}(f^{(k)}) - f^{(k)} \|_{L^p} + \sum_{j=0}^{m+1} 2^j \| I_{n,2^j}(f^{(k)}) - f^{(k)} \|_{L^p} \}.$$

Отсюда, например, при $k=1$ легко получается

С л е д с т в и е 1. *Пусть $\| f' - I_{n,\nu}(f') \|_{L^p} = O(\nu^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$. Тогда $\tau_2(f;\ \delta)_{L^p} = O(\delta^{1+\alpha})$, $1 \leqq p < \infty$.*

2. Случай дискретной нормы. Справедлива

Т е о р е м а 4. *Пусть f — конечная и интегрируемая по Риману функция $p \in (1,\ \infty)$ и ν, k, n — натуральные числа, $\nu \leqq n$. Тогда для любого $h \geqq 2\pi/(2n+1)$ выполнено неравенство*

$$\| f - I_{n,\nu}(f) \|_{l^p_{2n+1}} \leqq C_{k,p}(\tau_k(f;\ h)_{L^p} + (\nu h)^{-k} \omega_k(f;\ h)_{L^p}), \tag{8}$$

где точки ξ_j, $j=0, 1, \ldots, 2n$, в дискретной норме (см. (2)) последнего неравенства совпадают с узлами интерполяции (1), по которым построен $_n(f;\ x)$.

I Из последней теоремы сразу получается оценка для наилучшего приближения функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше ν в дискретной норме. Точнее, пусть $E_\nu(f)_{l^p_{2n+1}} = \inf \| f - T \|_{l^p_{2n+1}}$, где инфинум берется по всевозможным тригонометрическим полиномам $T(x)$ порядка не выше ν. Тогда справедлива

Т е о р е м а 5. *Для любой конечной и интегрируемой по Риману функции f и для любых $p \in (1,\ \infty)$ и натуральных ν, k и n выполнено неравенство $E_\nu(f)_{l^p_{2n+1}} \leqq C_{k,p} \tau_k(f;\ 1/\nu)_{L^p}$.*

Последнее утверждение при $p=2$ дает оценку погрешности между f и полиномом $T_\nu(f;\ x)$ порядка $\leqq \nu$, полученным по методу наименьших квадратов. Отметим, ввиду того, что коэффициенты этого полинома

$$T_\nu(f;\ x) = I_{n,\nu}(f;\ x) = a_0^{(n)}/2 + \sum_{j=1}^{\nu} a_j^{(n)} \cos jx + b_j^{(n)} \sin jx$$

линейно зависят от f и выражаются следующими простыми формулами:

$$a_j^{(n)} = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} f(x_l^{(n)}) \cos jx_l^{(n)}, \quad b_j^{(n)} = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} f(x_l^{(n)}) \sin jx_l^{(n)},$$

то этот полином часто используется в практическом гармоническом анализе.

3. Следствия и замечания. С л е д с т в и е 2 (см. [1, т. II, с. 50]). *Для любой ограниченной и интегрируемой по Риману функции f и для любого*

$p\in(1,\infty)\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p}\to 0,\quad \|\tilde f-\tilde I_{n,\nu}(f)\|_{L^p}\to 0,\ \|f-I_{n,\nu}(f)\|_{l^p_{2n+1}}\to 0\ (n\geqq\nu\to\infty).$

Последнее утверждение получается из оценок (6), (7) и (8) при $k=1$, учитывая, что для любой ограниченной и интегрируемой по Риману функции f

$$(9)\qquad \tau_1(f;\ \delta)_{L^p}\to 0 \quad \text{при} \quad \delta\to+0$$

(при $p=1$ это известно [7]). Действительно, если положим $M=\sup\{|f(t)|: t\in(-\infty,\ \infty)\}$, то

$$0\leqq\tau_1(f:\ \delta)^p_{L^p}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega_1(f;\ x,\ \delta)^{p-1}\omega_1(f;\ x,\ \delta)dx$$

$$\leqq(2M)^{p-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega_1(f;\ x,\ \delta)dx=(2M)^{p-1}\tau_1(f;\ \delta)_{L^1}\to 0$$

при $\delta\to+0$ (см. [7]), чем и доказано (9).

Учитывая, что если $f^{(k-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и $f^{(k)}(x)\in L^p\ (k\geqq 1)$, то

$$\tau_{k+1}(f;\ \delta)_{L^p}\leqq\delta^{k-1}\tau_2(f^{(k-1)};\ \delta)_{L^p}\leqq C\delta^k\omega_1(f^{(k)};\ \delta)_{L^p}$$

(см. [6; 8]), получаем

Следствие. 3. *Пусть $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и $f^{(k)}\in L^p$. $p\in(1,\ \infty)$. Тогда имеет место оценка*

$$\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p(l^p_{2n+1})}\leqq C_{k,p}\,\nu^{-k}\omega_1(f^{(k)};\ 1/\nu)_{L^p}.$$

Следствие 3 показывает, что для дифференцируемых функций f величины (3) и (4) можно оценить одним лишь интегральным модулем непрерывности соответствующей производной (обратите внимание, что $\omega_k(f;\ \delta)_{L^p}\leqq\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$).

Замечание 1. Теоремы, аналогичные сформулированным выше, можно получить и для интерполяционных полиномов $E_n(f;\ x)$ (см. [1, т. II, с. 24]) и их частичных сумм $E_{n,\nu}(f;\ x)$, построенных по $2n$ равноотстоящих узлов.

Замечание 2. Через модули $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$ можно получить оценки уклонения по норме L^p между f и некоторыми другими интерполяционными процессами, например, для второго процесса Бернштейна (интерполяционный аналог сумм Бернштейна — Рогозинского, см. [10, с. 269, 566]) и для процесса С. И. Раппопорт (интерполяционный аналог интеграла Валле-Пуссена, см. [10, с. 257, 574]).

4. Доказательства основных утверждений. Доказательству теорем 1 и 4 предпошлем несколько лемм. Везде в дальнейшем ν, k и n натуральные, $\nu\leqq n$, а f конечна и интегрируема по Риману.

Лемма 1 [1, т. II, с. 50]. *Справедливо неравенство*

$$(10)\qquad \|I_{n,\nu}(f)\|_{L^p}\leqq C_p\|I_n(f)\|_{L^p}\quad(1<p<\infty).$$

Лемма 2 [1. т, II, с. 46]. *Для любого тригонометрического полинома $T(x)$ порядка не выше n имеют место неравенства*

$$(11)\qquad \|T\|_{l^p_{2n+1}}\leqq C\|T\|_{L^p}\quad(1\leqq p<\infty),$$

(12) $$\| T \|_{L^p} \leqq C_p \| T \|_{l^p_{2n+1}} \quad (1<p<\infty).$$

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

(13) $$\| I_{n,\nu}(f)_{L^p} \leqq C_p \| f \|_{l^p_{2n+1}} \quad (1<p<\infty),$$

где точки ξ_j, $j=0, 1, \ldots, 2n$ (*см.* (2)), *в последней норме — узлы интерполяции* (1), *по которым построен* $I_n(f; x)$.

Доказательство. Учитывая (10), (12) и то, что $I_n(f; x_j^{(n)})=f(x_j^{(n)})$, $j=0, 1, \ldots, 2n$, получаем

$$\| I_{n,\nu}(f) \|_{L^p} \leqq C_p \| I_n(f) \|_{L^p} \leqq C_p \| I_n(f) \|_{l^p_{2n+1}} = C_p \| f \|_{l^p_{2n+1}},$$

чем и доказано (13).

Пусть m и r натуральные и $h_m=2\pi/m$. Обозначим через $S_{r,m}$ множество 2π-периодических сплайнов порядка r дефекта 1 по равномерному разбиению периода точками $t_j^{(m)}=jh_m+\alpha_r h_m$, $j=0, 1, \ldots, m$, $\alpha_r=(1+(-1)^r)/4$, т. е. функция $\varphi \in S_{r,m}$, если $(r-1)$-вая производная функция φ непрерывна и на каждом промежутке $[t_{j-1}^{(m)}, t_j^{(m)}]$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ функция φ есть алгебраический многочлен степени не выше r (см. [11, с. 281]).

Лемма 4. *Для любого сплайна* $\varphi \in S_{k, 2n+1}$ *выполнено неравенство*

(14) $$\| \varphi \|_{l^p_{2n+1}} = \{h_{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} | \varphi(\xi_j) |^p\}^{1/p} \leqq C_{k,p} \| \varphi \|_{L^p}.$$

Доказательство. Для любого алгебраического многочлена P степени не выше k имеет место неравенство (см. [9, с. 251])

$$\max\{ | P(u | : u \in [a, b]\} \leqq \left(\frac{2(1+p)k^2}{b-a}\right)^{1/p} \left(\int_a^b |P(u)|^p du\right)^{1/p} \quad (1 \leqq p<\infty).$$

Учитывая, что каждая точка ξ_j $(j=0, 1, \ldots, 2n)$ по модулю 2π принадлежат только одному из интервалов вида $(t_i^{(2n+1)}, t_{i+1}^{(2n+1)}]$ $(i=0, 1, \ldots, 2n)$ и то, что φ на отрезке $[t_i^{(2n+1)}, t_{i+1}^{(2n+1)}]=\Delta_i$ есть алгебраический многочлен степени не выше k, из последнего неравенства при $a=t_i^{(2n+1)}$, $b=t_{i+1}^{(2n+1)}$ и $P=\varphi$ получаем

$$| \varphi (\xi_j |^p \leqq (\max\{ | \varphi(u) | : u \in \Delta_i \}^p$$

$$\leqq 2(1+p)\, k^2 h_{2n+1}^{-1} \int_{\Delta_i} | \varphi(u) |^p du \quad (j=0, 1, \ldots, 2n).$$

Следовательно,

$$\| \varphi \|_{l^p_{2n+1}} \leqq (4\pi(1+p)k^2)^{1/p} \{\frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{2n} \int_{\Delta_i} | \varphi(u) |^p du\}^{1/p}$$

$$= (4\pi(1+p)\, k^2)^{1/p} \| \varphi \|_{L^p} = C_{k,p} \| \varphi \|_{L^p}.$$

Лемма доказана.

Как обычно, обозначим через W_p^k множество 2π-периодических функций f, таких, что $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и $\| f^{(k)} \|_{L^p}$ огранинена.

Лемма 5. *Для любой функции $f \in W_p^k$ имеет место неравенство*

$$\| f-I_{n,\nu}(f) \|_{L^p} \leqq C_{k,p}(n^{-k} \| f^{(k)} \|_{L^p}+\| f \|_{L^p}) \quad (1<p<\infty). \tag{15}$$

Доказательство. Для любой функции $f \in W_p^k$ существует сплайн $\varphi(f;\ t)$ $(=S_k(f;\ 2\pi/(2n+1),\ t)) \in S_{k,2n+1}$, такой, что (см. [12], [13, с. 168])

$$\varphi(f,\ x_j^{(n)})=f(x_j^{(n)}),\quad j=0,\ 1, \ldots,\ 2n+1, \tag{16}$$

и

$$\| \varphi(f)-f \|_{L^p} \leqq C_k n^{-k} \| f^{(k)} \|_{L^p} \tag{17}$$

(приводим результат в частной форме, которая нам достаточна для доказательства леммы). Следовательно, учитывая (16) и (13), получаем

$$\| I_{n,\nu}(f)-f \|_{L^p} \leqq \| I_{n,\nu}(f)_{L^p}+\| f \|_{L^p}$$

$$\leqq \| I_{n,\nu}(\varphi(f) \|_{L^p}+\| f \|_{L^p} \leqq C_p \| \varphi(f) \|_{l^p_{2u+1}}+\| f \|_{L^p}.$$

Ввиду (14) и (17) имеем

$$\| \varphi(f) \|_{l^p_{2n+1}} \leqq C_{k,p} \| \varphi(f) \|_{L^p} \leqq C_{k,p}(\| \varphi(f)-f \|_{L^p}+\| f \|_{L^p})$$

$$\leqq C_{k,p}(n^{-k} \| f^{(k)} \|_{L^p}+\| f \|_{L^p}),$$

чем и доказано утверждение леммы.

Лемма 6. *Для любой функции $f \in W_p^k$ имеет место неравенство*

$$\| I_{n,\nu}(f)-f \|_{L^p} \leqq C_{k,p} \nu^{-k} \| f^{(k)} \|_{L^p} \quad (1<p<\infty). \tag{18}$$

Доказательство. Отметим (см. [1, т. I, с. 423]), что при $p \in (1,\ \infty)$ частичные суммы $s_\nu(f;\ x)$ ряда Фурье $S[f]$ функции f осуществляют совме стное приближение функции f и $f^{(k)}$ порядком наилучшего приближения т. е. что

$$\| f-s_\nu(f) \|_{L^p} \leqq C_p E_\nu(f)_{L^p} \leqq C_{k,p} \nu^{-k} \| f^{(k)} \|_{L^p}$$

и

$$\| f^{(k)}-s_\nu^{(k)}(f) \|_{L^p}=\| f^{(k)}-s_\nu(f^{(k)}) \|_{L^p} \leqq C_p E_\nu(f^{(k)}) \|_{L^p} \leqq C_p \| f^{(k)} \|_{L^p},$$

де $E_\nu(f)_{L^p}=\inf\{ \| f-T \|_{L^p}:\ T(x)$ — триг. полиномы порядка $\leqq \nu\}$.

Учитывая еще, что $I_{n,\nu}(T;\ x) \equiv T(x)$ для любого тригонометрического полинома порядка не выше ν, из (15) получаем

$$\| I_{n,\nu}(f)-f \|_{L^p}=\| I_{n,\nu}(f-s_\nu(f))-(f-s_\nu(f)) \|_{L^p}$$

$$\leqq C_{k,p}(n^{-k} \| (f-s_\nu(f))^{(k)} \|_{L^p}+\| f-s_\nu(f) \|_{L^p})$$

$$\leqq C_{k,p}(n^{-k} \| f^{(k)} \|_{L^p}+\nu^{-k} \| f^{(k)} \|_{L^p}) \leqq C_{k,p} \nu^{-k} \| f^{(k)} \|_{L^p}.$$

Лемма доказана.

Лемма 7 (см. [5; 14]). *Для любой конечной функции* $f \in L^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *и любого* $h > 0$ *существует функция* $f_{k,h} \in W_p^k$, *такая, что*

$$|f_{k,h}(x) - f(x)| \leq \omega_k(f;\ x,\ 2h), \tag{19}$$

$$\| f_{k,h} - f \|_{L^p} \leq 2\omega_k(f;\ h)_{L^p}, \tag{20}$$

$$\| f_{k,h}^{(r)} \|_{L^p} \leq C_r h^{-r} \omega_r(f;\ h)_{L^p}, \quad r = 1,\ 2, \ldots,\ k. \tag{21}$$

Лемма 8 (см. [5]). *Для любого* $h \geq 2\pi/(2n+1)$ *справедливо неравенство* $(1 \leq p < \infty)$

$$\| \omega_k(f;\ x,\ 2h) \|_{l^p_{2n+1}} \leq C_k \tau_k(f;\ h)_{L^p}. \tag{22}$$

Доказательство теоремы 1. Будем следовать схеме доказательства теоремы 1 из [5]. Пусть $f_{k,h}$ — функция из леммы 7. Тогда

$$\| I_{n,\nu}(f) - f \|_{L^p} \leq \| I_{n,\nu}(f - f_{k,h}) \|_{L^p} + \| I_{n,\nu}(f_{k,h}) - f_{k,h} \|_{L^p} + \| f_{k,h} - f \|_{L^p} = A_1 + A_2 + A_3. \tag{23}$$

Ввиду (13), (19) и (22) имеем

$$A_1 \leq C_p \| f - f_{k,h} \|_{l^p_{2n+1}} \leq C_p \| \omega_k(f;\ x,\ 2h) \|_{l^p_{2n+1}} \leq C_{k,p} \tau_k(f;\ h)_{L^p},$$

где точки ξ_j, $j = 0,\ 1, \ldots,\ 2n$, в последних дискретных нормах совпадают с узлами интерполяции (1).

Из (18) и (21) при $r = k$, учитывая, что $f_{k,h} \in W_p^k$, получаем $A_2 \leq C_{k,p} \nu^{-k} \| f_{k,p}^{(k)} \|_{L^p} \leq C_{k,p} (\nu h)^{-k} \omega_k(f;\ h)_{L^p}$. Наконец, из неравенства (20) следует, что $A_3 \leq 2\omega_k(f;\ h)_{L^p}$. Подставляя полученные оценки для A_1, A_2 и A_3 в (23), получаем утверждение теоремы 1.

Замечание 3. Анализируя доказательство теоремы 1, видим, что существенными элементами при получении оценки (5) являются леммы 3 и 6 для оператора $I_{n,\nu}(f)$ и его линейность. Этот факт был отмечен в [5].

Доказательство теоремы 4. Ввиду замечания 3 для доказательства оценки (8) достаточно получить аналоги неравенств (13) и (18) для случая, когда интегральная L^p норма в их левых частях заменена дискретной нормой $\| \cdot \|_{l^p_{2n+1}}$.

Аналогом оценки (13) для случая дискретных норм является неравенство

$$\| I_{n,\nu}(f) - f \|_{l^p_{2n+1}} \leq C_p \| f \|_{l^p_{2n+1}} \quad (1 < p < \infty). \tag{24}$$

Справедливость его сразу вытекает из (11) и (13).

Докажем, что для $f \in W_p^k$ имеет место

$$\| f - I_{n,\nu}(f) \|_{l^p_{2n+1}} \leq C_{k,p} \nu^{-k} \| f^{(k)} \|_{L^p} \quad (1 < p < \infty). \tag{25}$$

В самом деле, из того, что $f(x_j^{(n)}) = I_n(f;\ x_j^{(n)})$, $j = 0,\ 1, \ldots,\ 2n$, следует

$$\| f - I_{n,\nu}(f) \|_{l^p_{2n+1}} = \| I_n(f) - I_{n,\nu}(f) \|_{l^p_{2n+1}} \leq \| I_n(f) \|_{l^p_{2n+1}} + \| I_{n,\nu}(f) \|_{l^p_{2n+1}}$$
$$\leq C(\| I_n(f) \|_{L^p} + \| I_{n,\nu}(f) \|_{L^p}) \leq C_p \| I_n(f) \|_{L^p}.$$

Тогда для $f \in W_p^k$ в силу леммы 5, $\| I_n(f) \|_{L^p} \leq C_{k,p}(n^{-k} \| f^{(k)} \|_{L^p} + \| f \|_L)$ и, следовательно, $\| f - I_{n,\nu}(f) \|_{l^p_{2n+1}} \leq C_{k,p}(n^{-k} \| f^{(k)} \|_{L^p} + \| f \|_{L^p})$. Из последного неравенства, как в доказательстве леммы 6, получается (25).

Из оценок (24) и (25), используя функцию $f_{k,h}$ из леммы 7, выкладками, аналогичными проведенным при доказательстве теоремы 1, получается оценка (8).

Доказательство теоремы 3. Учитывая, что [6; 8]

$$\tau_{k+1}(f;\ \delta)_{L^p} \leq \delta^r \tau_{k-r+1}(f^{(r)};\ \delta)_{L^p} \quad (1 \leq r \leq k),$$

$$\tau_2(f;\ \delta)_{L^p} \leq C\delta\omega_1(f';\ \delta)_{L^p}$$

и, что $\omega_1(f+g;\ \delta)_{L^p} \leq \omega_1(f;\ \delta)_{L^p} + \omega_1(g;\ \delta)_{L^p}$, получаем

$$\tau_{k+1}(f;\ 1/\nu)_{L^p} \leq C\nu^{-k}\omega_1(f^{(k)};\ 1/\nu)_{L^p}$$

$$\leq C\nu^{-k}\{ \| f^{(k)} - I_{n,\,2^{m+1}}(f^{(k)}) \|_{L^p} + \omega_1(I_{n,\,2^{m+1}}(f^{(k)});\ 1/\nu)_{L^p}\}. \tag{26}$$

Для оценки последнего члена воспользуемся стандартным методом Салема—Стечкина см. [9, с. 345]. Используя свойства модуля непрерывности $\omega_1(f;\delta)_{L^p}$, неравенство Миньковского и нераравенсто Бернштейна, получаем

$$\omega_1(I_{n,\,2^{m+1}}(f^{(k)});\ 1/\nu)_{L^p} \leq \nu^{-1} \| I'_{n,\,2^{m+1}}(f^{(k)}) \|_{L^p}$$

$$\leq \nu^{-1}\{ \| I'_{n,1}(f^{(k)}) \|_{L^p} + \sum_{j=0}^{m} \| I'_{n,2^{j+1}}(f^{(k)}) - I'_{n,2^j}(f^{(k)}) \|_{L^p}\}$$

$$\leq \nu^{-1}\{ \| I_{n,0}(f^{(k)}) - f^{(k)} \|_{L^p} + 3 \sum_{j=0}^{m} 2^j \| I_{n,2^j}(f^{(k)}) - f^{(k)} \|_{L^p}\}.$$

Подставляя последнюю оценку в (26), получаем утверждение теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. Т. I и II. Москва, 1965.
2. P. Erdös, P. Turan. On interpolation, (I) Quadrature and mean cönvergence in the Lagrange interpolation. — *Ann. Math.*, **38**, 1938, 142—155.
3. V. A. Popov. Converse theorem for the onesided trigonometrical approximations. — *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **30**, 1977, 1529—1532.
4. А. Андреев, В. А. Попов, Бл. Сендов. Теоремы типа Джексона для наилучших односторонних приближений тригонометрическими многочленами и сплайнами. — *Матем. заметки*, **26**, 1979, 791—804.
5. A. S. Andreev, V. A. Popov. Approximation of functions by means of linear summation operators in L_p. — *Proc. Conf. Constructive function theory*, Budapest, 1980 (to appear).
6. V. A. Popov, A. S. Andreev. Stečkin's type theorems for onesided trigonometrical and spline approximation — *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **31**, 1978, 151—154.
7. Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно-монотонных (в частности, рациональных) функций. *Матем. сборник*, **101**, 1976, 508—541.

8. В. А. Попов. Заметка об одностороннем приближении функций. — *Доклады БАН*, **32**, 1979, 1319—1322.
9. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. Москва, 1960.
10. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. Москва, 1949.
11. Н. П. Корнейчук. Экстремальные задачи теории приближения. Москва, 1976.
12. Ю. Н. Субботин. Об одном линейном методе приближения функций. — *Матем. заметки*, **7**, 1970, 423—430.
13. Ю. Н. Субботин. Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны. — *Труды МИ АН СССР*, **138**, 1975, 118—173.
14. Ю. А. Брудний. Аппроксимация функций n переменных квазимногочленами. — *Известия АН СССР, сер. матем.*, **34**, 1970, 564—583.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 25. 5. 1981