PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ—ЛАГРАНЖА

ВЛАДИМИР Х. ХРИСТОВ

Получены оценки для коэффициентов Фурье—Лагранжа по равноотстоящим узлам на периоде через модуль $\tau_k(f;\delta)_{L^p}$ функции f. Исследованы его связи с характеристиками функции f, учитывающие ее вариацию, и на их основе получены порядковые оценки коэффициентов Фурье—Лагранжа для некоторых классов функций.

Для вещественной конечной и 2π-периодической функции f рассмотрим ее интерполяционный тригонометрический полином Фурье—Лагранжа (см. [1, с. 10])

$$I_n(f;\, x)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(n)}(f)\cos\nu x+b_\nu^{(n)}(f)\sin\nu x, \tag{1}$$

совпадающий с ней в точках

$$x_j^{(n)}=2\pi j/(2n+1),\quad j=0,1,\ldots,2n \tag{2}$$

(а, следовательно, также и в точках, конгруентных точкам $x_j^{(n)}$ по $\mathrm{mod}\,2\pi$). Обозначим через $I_{n,\nu}(f;\, x)$ частичную сумму порядка ν полинома (1) и припомним, что его коэффициенты выражаются через значения функции f в узлах (2) формулами

$$a_\nu^{(n)}(f)=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j^{(n)})\cos\nu x_j^{(n)},$$

$$b_\nu^{(n)}(f)=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j^{(n)})\sin\nu x_j^{(n)}\quad(\nu=0,1,\ldots,n). \tag{3}$$

В практическом гармоническом анализе полиномы $I_n(f;\, x)$ и $I_{n,\nu}(f;\, x)$ являются удобным и обычным аппаратом приближения функции f, так как часто значения f можно найти лишь на конечной системе точек периода. Одним из основных вопросов в этом направлении является вопрос об аппроксимативных свойствах полиномов $I_{n,\nu}(f)$ и о вкладе, который дает ν-тый член суммы (1) при аппроксимации f. При этом ясно, что поведение $I_{n,\nu}(f)$, $a_\nu^{(n)}(f)$ и $b_\nu^{(n)}(f)$ существенно зависит от структурных свойств функции f и от величины ν и n.

В работе [2] нами исследовались величины $(1<p<\infty)$

$$\|f-I_{n,\nu}(f)\|_{L^p(l^p_{2n+1})}, \tag{4}$$

где, как обычно $(1\leq p<\infty)$,

ПЛИСКА Български математически студии. Том 5, 1983, с. 23—31.

(5) $$\| g\|_{L^p}=\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(t)|^p dt\}^{1/p},\quad \|g\|_{l^p_{2n+1}}=\{\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}|g(\xi_j)|^p\}^{1/p}$$

(в наших рассмотрениях всегда точки ξ_j, $j=0, 1, \ldots, 2n$, будут равноотстоящими на периоде, т. е. $\xi_j-\xi_{j-1}=2\pi/(2n+1)$, $j=1, 2, \ldots, 2n$, и это в дальнейшем не будем специально оговаривать). Оказалось, что поведение величин (4) можно характеризовать интегральным модулем непрерывности функции

$$\omega_k(f;\ \delta)_{L^p}=\sup\{\|\Delta_h^k f(x)\|_{L^p}:\ |h|\leq\delta\}$$

и модулем

(6) $$\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}=\|\omega_k(;\ x, \delta)\|_{L^p},$$

где $\omega_k(f;\ x, \delta)=\sup\{|\Delta_h^k f(t)|:\ t, t+kh\in[x-k\delta/2,\ x+k\delta/2]\}$, $\Delta_h^k f(t)=\Sigma_{j=0}^k\times(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f(t+jh)$, k — натуральное, $0<\delta$ — действительное (об истории модуля $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$ и его применениях см. [3—5]).

В настоящей работе получим оценки для коэффициентов Фурье—Лагранжа (3) функции f через модули $\omega_k(f;\ \delta)_{L^p}$ и $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$, а также и через некоторые другие характеристики функции f. О коэффициентах $a_\nu^{(n)}(f)$ и $b_\nu^{(n)}(f)$ известно, что они стремятся к нулю для всякой интегрируемой в классическом смысле Римана функции f при $n\geq\nu\to\infty$ (см. [1, с. 25]) и что если функция f имеет ограниченную p-вариацию, т. е.

(7) $$V_p(f)=\sup\{(\sum_{j=0}^{l-1}|f(t_{j+1})-f(t_j)|^p)^{1/p}:\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_l=2\pi\}<\infty,$$

то (см. [1, с. 27], [6]) $\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq C_p V_p(f)\nu^{-1/p}$, а если f имеет ограниченное k-изменение, т. е.

(8) $$V^{(k)}(f)=\sup\{\sum_{j=0}^{l-1}|\Delta_{h_j}^k f(t_j)|:\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_l=2\pi\}<\infty$$

(здесь $h_j=(t_{j+1}-t_j)/k$), то [6] $\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq C_k(M(f)+V^{(k)}(f))\nu^{-1}$, где C_p и C_k — положительные постоянные, зависящие соответственно от p и k, $M(f)=\sup\{|f(t)|:\ t\in[0, 2\pi]\}$.

Все эти результаты получаются как следствие из следующего утверждения, которое является основным в настоящей статье и доказывается в п. 2.

Теорема. *Для любой ограниченной и интегрируемой по Риману 2π-периодической функции f и для любых натуральных k, ν и n, $\nu\leq n$, имеет место оценка*

(9) $$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq C_k(\tau_k(f;\ h)_L+(\nu h)^{-k}\omega_k(f;\ h)_L\},$$

где $0<C_k$ — константа, зависящая лишь от k, а $2\pi/(2n+1)\leq h$ — любое.

В п. 1 припомним свойства модуля $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$ и получим некоторые его связи с другими характеристиками функции f. В п. 3 получим, как следствия из этих утверждений и из теоремы, оценки для коэффициентов (3) для некоторых классов функций.

Для облегчения формулировок утверждений отметим, что всюду в дальнейшем рассматриваются только функции, интегрируемые в классическом смысле Римана и с периодом 2π. Следовательно, они всегда будут конечными и ограниченными. Кроме этого, всегда ν, k и $n(\nu \leqq n)$ — произвольные натуральные числа, $0<\delta$ и $p \in [1, \infty)$ — любые действительные числа. Наконец, константы (всюду положительные), быть может и разные, всегда обозначаются через C, C_k и $C_{k,p}$, указывая индексами лишь от каких параметров они зависят.

1. Свойства модуля $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$.

Лемма 1 (см. [3, 7]). *Имеют место неравенства*

1) $\omega_k(f:\ \delta)_{L^p} \leqq \tau_k(f;\ \delta)_{L^p} \leqq \tau_k(f;\ \delta)_{L^q} \leqq \tau_k(f;\ \delta)_{L^\infty} = \omega_k(f;\ \delta)_C (1 \leqq p \leqq q \leqq \infty)$,

2) $\tau_k(f;\ \lambda\delta)_{L^p} \leqq (1+C\lambda)^{Ck} \tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$ ($0<\lambda$ — *действительное*),

3) $\tau_{k+1}(f;\ \delta)_{L^p} \leqq \delta \tau_k(f';\ \delta)_{L^p}$,

4) $\tau_2(f;\ \delta)_{L^p} \leqq C\delta\omega_1(f';\ \delta)_{L^p}$,

5) $\tau_1(f;\ \delta)_{L^p} \leqq \delta \| f' \|_{L^p}$.

Лемма 2 (см. [8]). *Справедливы утверждения*

1) $\lim_{\delta \to +0} \tau_1(f;\ \delta)_L = 0$ *тогда и только тогда, когда фунция f интегрируема по Риману.*

2) $\tau_1(f;\ \delta)_L = O(\delta)$ *тогда и только тогда, когда функция f имеет ограниченную* 1-*вариацию, т. е. имеет конечное полное изменение на периоде.*

Пусть $\Pi_{n,\alpha}$ — произвольное разбиение отрезка $[\alpha, \alpha+2\pi]$ $2n$ точками t_j, $j=0, 1, \ldots, 2n-1$, удовлетворяющими условиям $\alpha \leqq t_0 < t_1 \leqq t_2 < t_3 \leqq \cdots \leqq t_{2n-2} < t_{2n-1} \leqq \alpha+2\pi$.

Для того чтобы характеризовать функцию f, для которой p-вариация или k-изменение неограничены (см. (7) и (8)), по аналогии с их определениями вводим следующую характеристику функции f:

$$\varkappa_{k,p}(f;\ n) = \sup_{\alpha} \sup \{ (\sum_{j=0}^{n-1} | \Delta_{h_j}^k f(t_{2j}) |^p)^{1/p} :\ \Pi_{n,\alpha} \}, \tag{10}$$

где $h_j = (t_{2j+1} - t_{2j})/k$, $j=0, 1, \ldots, n-1$. Частные случаи характеристики $\varkappa_{k,p}(f;\ n)$ рассматривались и ранее разными авторами и применялись в различных вопросах теории аппроксимации. Точнее, при $k=1, p=1$, (10) ввели и использовали Попов [9] и Чантурия [10], при $k \geqq 1, p=1$ — автор совместно с Петрушевым [11] и при $k=1$, $p \geqq 1$ — Мушелак [12].

Очевидно, что $\varkappa_{k,p}(f;\ n)$ — неубывающая функция целочисленного параметра n и (см. (7) и (8))

$$\varkappa_{1,p}(f;\ n) \leqq V_p(f), \quad \varkappa_{k,1}(f:\ n) \leqq V^{(k)}(f). \tag{11}$$

Следующая лемма связывает $\tau_k(f;\ 2\pi/n)_{L^p}$ и $\varkappa_{k,p}(f;\ n)$.

Лемма 3. *Имеет место неравенство* (*случай* $k=1, p=1$ *известен, см.* [4])

$$\tau_k(f;\ 2\pi/n)_{L^p} \leqq (1+k)^{1/p} n^{-1/p} \varkappa_{k,p}(f;\ n). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное и $\rho_n = 2\pi/n$. Используя неравенство Миньковского, получаем

$$\tau_k(f;\ \rho_n)_{L^p}=\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega_k(f;\ x,\ \rho_n)^p dx\}^{1/p}=\{\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{j\rho_n}^{(j+1)\rho_n}\omega_k(f;\ x,\ \rho_n)^p dx\}^{1/p}$$

$$\leq\{\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}(\omega_k(f;\ \xi_j,\ \rho_n)+\varepsilon)^p\rho_n\}^{1/p}\leq n^{-1/p}\{\sum_{j=0}^{n-1}\omega_k(f;\ \xi_j,\ \rho_n)^p\}^{1/p}+\varepsilon$$

$$\leq n^{-1/p}\{\sum_{j=0}^{n-1}(|\Delta^k_{h'_j}f(\xi'_j)|+\varepsilon)^p\}^{1/p}+\varepsilon\leq n^{-1/p}\{\sum_{j=0}^{n-1}|\Delta^k_{h'_j}f(\xi'_j)|^p\}^{1/p}+2\varepsilon,$$

где $\xi_j\in[j\rho_n,(j+1)\rho_n]$, $\xi'_j,\ \xi'_j+kh'_j\in[\xi_j-k\rho_n/2,\ \xi_i+k\rho_n/2]\subset[(j-k/2)\rho_n,\ (j+1+k/2)\rho_n]$ и h'_j всегда можно считать неравным нулю ($j=0, 1, \ldots, n-1$). Отметим, что пары точек $\xi'_j,\ \xi'_j+kh'_j$ лежат на отрезках длины $(k+1)\rho_n$ и так как всегда $|\Delta^k_h f(t)|=|\Delta^k_{-h}f(t+kh)|$, то если нужно, переобозначая точки пары, можно считать h'_j положительным. Тогда имеем

$$\{\sum_{j=0}^{n-1}|\Delta^k_{h'_j}f(\xi'_j)|^p\}^{1/p}=\{\sum_{l=0}^{k}\sum_j|\Delta^k_{h'_{(k+1)j+l}}f(\xi'_{(k+1)j+l})|^p\}^{1/p}$$

$$\leq\{(k+1)\max_{0\leq l\leq k}\sum_j|\Delta^k_{h'_{(k+1)j+l}}f(\xi'_{(k+1)j+l})|^p\}^{1/p}\leq(k+1)^{1/p}\varkappa_{k,p}(f;\ n),$$

так как в каждой внутренней сумме точки, по которым берется k-тая конечная разность, с возрастанием j идут слева направо на числовой оси, и число слагаемых в каждой такой сумме не превышает $[n/(k+1)]+1\leq n$. Итак, получили, что

$$\tau_k(f;\ 2\pi/n)_{L^p}\leq(k+1)^{1/p}n^{-1/p}\varkappa_{k,p}(f,\ n)+2\varepsilon.$$

Из этого неравенства, ввиду произвольности $\varepsilon<0$, следует утверждение леммы.

Замечание 1. Для разбиения $\Pi_{n,\alpha}$ из определения $\varkappa_{k,p}(f;\ n)$ (см. (10)) обозначим $|\Pi_{n,\alpha}|=\max\{t_{2j+1}-t_{2j}:\ j=0, 1, \ldots, n-1\}$. Тогда, проследив доказательство последней леммы, видно, что всегда для $\varkappa_{k,p}(f;\ n)$ из оценки (12) $|\Pi_{n,\alpha}|\leq2\pi(k+\ )/n$, т. е. $|\Pi_{n,\alpha}|\to0$ при $n\to\infty$. Следовательно, [13], если

$$V^*_p(f)=\lim_{\delta\to+0}\sup_n\sup\{(\sum_{j=0}^{n-1}|\Delta^1_{h_j}f(t_{2j})|^p)^{1/p}:\ \Pi_{n,\alpha},\ |\Pi_{n,\alpha}|\leq\delta\},$$

то для $\varkappa_{k,p}(f;\ n)$ из оценки (12) имеем, что $\lim_{n\to\infty}\varkappa_{k,p}(f;\ n)=V^*_p(f)$. Из оценки (12), учитывая замечание 1, (11) и 3) из леммы 1, получаем:

Лемма 4. *Справедливо*

1) *если* $V^*_p(f)<\infty$, *то* $\tau_1(f;\ 2\pi/n)_{L^p}\leq2V^*_p(f)n^{-1/p}$;

2) *если* $V_p(f)<\infty$, *то* $\tau_1(f;\ 2\pi/n)_{L^p}\leq2V_p(f)n^{-1/p}$;

3) *если* $V^{(k)}(f)<\infty$, *то* $\tau_k(f;\ 2\pi/n)_L\leq(k+1)V^{(k)}(f)n^{-1}$;

4) *если* $f^{(k-1)}$ *абсолютно непрерывна и* $V_p(f^{(k)})<\infty$, *то* $\tau_{k+1}(f;\ 2\pi/n)_{L^p}\leq C_kV_p(f^{(k)})n^{-k-1/p}$.

Следующая лемма показывает некоторые взаимосвязи между характеристиками $\varkappa_{k,p}(f;\ n)$ при различных k и p. Справедливость ее утверждений вытекает из определения (1) и из известных соотношений между p-нормами и k-разностями при различных p и k.

Лемма 5. *Справедливо*

1) $\varkappa_{k,p}(f;\ n)\leq\varkappa_{k,q}(f;\ n)$, *где* $1\leq p\leq q<\infty$,

2) $\varkappa_{k,p}(f;\ n)\leq C_{k,r}\varkappa_{r,p}(f;\ n)$, *где* $1\leq r\leq k$.

Пусть $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ — множество функций, для которых $\omega_1(f;\ \delta)_{L^p}=O(\delta^\alpha)$, $0<\alpha\leq 1$, $1\leq p\leq\infty$. Имеет место следующая:

Лемма 6. *Пусть* $\tau_1(f;\ \delta)_{L^p}=O(\delta^\alpha)$, $0<\alpha\leq 1$. *Тогда*

1) *если* $\alpha p\leq 1$, *то* $f\in\mathrm{Lip}(\alpha-1/p+1/q, q)$ *при всех* $q\in(p, p/(1-\alpha p))$;

2) *если* $\alpha p>1$, *то* f *непрерывна и* $f\in\mathrm{Lip}(\alpha-1/p+1/q, q)$ *при всех* $q\in(p, \infty]$.

Включения последней леммы следуют из 1) леммы 1 и из соответствующего результата Харди и Литтлвуда (см., например, [14]) для функций из $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$. Непрерывность функции f при $\alpha p>1$ вытекает из следующего утверждения.

Лемма 7. *Пусть* $\sigma_k=f(x_k+0)-f(x_k-0)$, *где* x_k — *точки разрыва функции* f *на периоде (функция, интегрируемая по Риману, не имеет разрывов* II *рода и может иметь лишь счетное число разрывов* I *рода). Тогда*

$$\{\sum_{k=1}^{\infty}|\sigma_k|^p\}^{1/p}\leq\sup_n\{n^{1/p}\tau_1(f;\ 2\pi/n)_{L^p}\}. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $\rho_n=2\pi/n$, $\Delta_j=[j\rho_n, (j+1)\rho_n]$, $M_j=\sup\{f(t): t\in\Delta_j\}$, $m_j=\inf\{f(t): t\in\Delta_j\}$, $j=0, 1, \ldots, n-1$.
Тогда

$$\{\sum_{k=1}^{\infty}|\sigma_k|^p\}^{1/p}\leq\sup_n\{\sum_{j=0}^{n-1}(M_j-m_j)^p\}^{1/p}\leq\sup_n\{\rho_n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{\Delta_j}\omega_1(f;\ x, \rho_n)^p dx\}^{1/p}$$

$$=\sup_n\{n^{1/p}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega_1(f;\ x, \rho_n)^p dx)^{1/p}\}=\sup_n\{n^{1/p}\tau_1(f;\ 2\pi/n)_{L^p}\}.$$

Лемма доказана.

Если $\tau_1(f;\ \delta)_{L^p}=o(\delta^{1/p})$, то из (13) получаем, что $\Sigma_{k=1}^{\infty}|\sigma_k|^p=0$ и, следовательно, f непрерывна.

Модуль $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$ можно связать и с характеристикой, подобной модулю гладкости дробного порядка $\omega_{k-1/p}(f;\ \delta)$, введенной Юнгом и Терехином (см. [13]). Обозначим

$$\omega_{k-1/p}(f;\ \delta)_n=\sup\{\varkappa_{k,p}(f;\ n): \Pi_{n,\alpha}\,|\,\Pi_{n,\alpha}|\leq\delta\}. \tag{14}$$

Величину $\omega_{k-1/p}(f;\ \delta)_n$ будем называть модулем непрерывности порядка $k-1/p$ функции f. Между модулем гладкости $\omega_{k-1/p}(f;\ \delta)$ из [13] и модулем $\omega_{k-1/p}(f;\ \delta)_n$ очевидна следующая связь:

$$\omega_{k-1/p}(f;\ \delta)_n\leq\omega_{k-1/p}(f;\ \delta)\ \text{и}\ \omega_{k-1/p}(f;\ \delta)=\sup_n\omega_{k-1/p}(f;\ \delta)_n.$$

Из леммы 3 и сделанного после ее доказательства замечания следует следующая лемма:

Лемма 8. *Справедливо неравенство*

$$\tau_k(f;\ 2\pi/n)_{L^p}\leq(k+1)^{1/p}n^{-1/p}\omega_{k-1/p}(f;\ 2\pi(k+1)/n)_n.$$

2. Доказательство основной теоремы. Сформулируем и докажем сначала несколько лемм.

Лемма 9. *Имеет место неравенство*

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|,\quad |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq \|f\|_{l^1_{2n+1}}, \tag{15}$$

где точки ξ_j, $j=0,1,\ldots,2n$, *в последней норме (см. (5)) совпадают с узлами интерполяции (2) функции* f.

Доказательство. Учитывая ограниченность функций $\sin t$ и $\cos t$, получаем

$$|a_\nu^{(n)}(f)|=\left|\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n} f(x_j^{(n)})\cos\nu x_j^{(n)}\right|\leq\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}|f(x_j^{(n)})|=\|f\|_{l^1_{2n+1}}.$$

Оценка для коэффициеотов $b_\nu^{(n)}$ получается аналогично.

Пусть m и r — натуральные числа и $\rho_m=2\pi/m$. Через $S_{r,m}$ обозначим множество 2π-периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами $t_j^{(m)}=j\rho_m+\alpha_r\rho_m$, $j=0,1,\ldots,m$, $\alpha_r=(1+(-1)^r)/4$, т. е. 2π-периодическая функция $\varphi\in S_{r,m}$, если $r-1$ — производная функции φ, непрерывна и на каждом промежутке $[t_{j-1}^{(m)}, t_j^{(m)}]$ $(j=1,2,\ldots,m)$ функция φ совпадает с алгебраическим многочленом степени не выше r (см. [15, с. 281]). Обозначим через W_p^k множество 2π-периодических функций f, для которых $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и $f^{(k)}\in L^p$.

Лемма 10. *Для любой функции* f *из* W_1^k *выполнено неравенство*

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|, |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq C_k(n^{-k}\|f^{(k)}\|_L+\|f\|_L). \tag{16}$$

Доказательство. Как известно (см. [16]), для функций $f\in W_1^k$ существует сплайн $\varphi(f;\ x)\in S_{k,\,2n+1}$, который интерполирует f в узлах (2), т. е.

$$\varphi(f;\ x_j^{(n)})=f(x_j^{(n)}),\quad j=0,1,\ldots,2n+1, \tag{17}$$

и такой, что

$$\|\varphi(f)-f\|_L\leq C_k\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)^k\|f^{(k)}\|_L\leq C_k n^{-k}\|f^{(k)}\|_L. \tag{18}$$

Тогда, ввиду (16) и (18), получаем

$$|a_\nu^{(n)}(f)|\leq\|f\|_{l^1_{2n+1}}=\|\varphi(f)\|_{l^1_{2n+1}}. \tag{19}$$

Но, как показали в [2], для любого сплайна $\varphi\in S_{k,\,2n+1}$ справедливо следующее соотношение между его дискретной l^1_{2n+1} и интегральной L нормами: $\|\varphi\|_{l^1_{2n+1}}\leq 8\pi k^2\|\varphi\|_L$. В силу этого, из (19) и (18) получаем

$$|a_\nu^{(n)}(f)|\leq C_k\|\varphi(f)\|_L\leq C_k(\|\varphi(f)-f\|_L+\|f\|_L)\leq C_k(n^{-k}\|f^{(k)}\|_L+\|f\|_L),$$

чем и доказана оценка (16) для $a_\nu^{(n)}(f)$. Оценка (16) для коэффициентов $b_\nu^{(n)}(f)$ получается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 11. *Для любой функции* $f\in W_1^k$ *справедлива оценка*

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|,\ |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq C_k\nu^{-k}\|f^{(k)}\|_L. \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим суммы Валле-Пуссена (см. [17, с. 211])

$$\sigma_{\nu-1}(f;\ x)=(S_{[(\nu-1)/2]}(f;\ x)+S_{[(\nu-1)/2]+1}(f;\ x)+\cdots+S_{\nu-1}(f;\ x))/[\nu/2],$$

где $[x]$, как обычно, обозначает целую часть числа x, а $S_j(f;\ x)$ — j-тая частичная сумма ряда Фурье функции f. Хорошо известно, что $(1\leq p\leq\infty)$

(21) $$\|f-\sigma_{\nu-1}(f)\|_{L^p}\leq 4E_{[(\nu-1)/2]}(f)_{L^p},$$

где $E_m(f)_{L^p}=\inf\{\|f-T\|_{L^p}:\ T\in H_m^T\}$ — наилучшее приближение функции f в норме L^p тригонометрическими полиномами порядка не выше m.

Известно, что для $f\in W_p^k$ выполнено $E_m(f)_{L^p}\leq C_k m^{-k}\|f^{(k)}\|_{L^p}$. Следовательно, из (21) при $p=1$ для $f\in W_1^k$ получаем

$$\|f-\sigma_{\nu-1}(f)\|_L\leq C_k[(\nu-1)/2]^{-k}\|f^{(k)}\|_L\leq C_k\nu^{-k}\|f^{(k)}\|_L.$$

Из того, что $S_j^{(k)}(f;\ x)\equiv S_j(f^{(k)};\ x)$, вытекает, что $\sigma_{\nu-1}^{(k)}(f;\ x)\equiv\sigma_{\nu-1}(f^{(k)};\ x)$, и, следовательно,

$$\|(f-\sigma_{\nu-1}(f))^{(k)}\|_L=\|f^{(k)}-\sigma_{\nu-1}(f^{(k)})\|_L\leq 4E_{[(\nu-1)/2]}(f^{(k)})_L\leq C\|f^{(k)}\|_L.$$

Тогда, учитывая, что для любого тригонометрического полинома $T(x)$ порядка не выше $\nu-1$ имеем $a_\nu^{(n)}(T)=b_\nu^{(n)}(T)=0$ и, в частности $a_\nu^{(n)}(\sigma_{\nu-1}(f))=b_\nu^{(n)}(\sigma_{\nu-1}(f))=0$, то из (17) для $f\in W_1^k$ получаем

$$|a_\nu^{(n)}(f)|=|a_\nu^{(n)}(f-\sigma_{\nu-1}(f))|\leq C_k(n^{-k}\|(f-\sigma_{\nu-1}(f))^{(k)}\|_L+\|f-\sigma_{\nu-1}(f)\|_L)$$
$$\leq C_k(n^{-k}\|f^{(k)}\|_L+\nu^{-k}\|f^{(k)}\|_L)\leq C_k\nu^{-k}\|f^{(k)}\|_L.$$

Оценка (21) для коэффициентов $b_\nu^{(n)}(f)$ получается аналогично. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Будем следовать схеме доказательства теоремы 1 из [5]. Для любого $h>0$ функции f сопоставляем ее модифицированную функцию Стеклова $f_{k,h}$ (см. [3; 5]). Известно, что $f_{k,h}\,W_1^k$ и

$$|f_{k,h}(x)-f(x)|\leq\omega_k(f;\ x,2h),\ \|f_{kh}^{(k)}\|_L\leq C_kh^{-k}\omega_k(f;\ h)_L.$$

Тогда из (15) и (20) получаем

$$|a_\nu^{(n)}(f)|\leq|a_\nu^{(n)}(f-f_{k,h})|+|a_\nu^{(n)}(f_{k,h})|\leq\|f-f_{k,h}\|_{l^1_{2n+1}}+C_k\nu^{-k}\|f_{kh}^{(k)}\|_L$$
$$\leq\|\omega_k(f:\ x,2h)\|_{l^1_{2n+1}}+C_k(\nu h)^{-k}\omega_k(f;\ h)_L\leq C_k(\tau_k(f;\ h)_L+(\nu h)^{-k}\omega_k(f;\ h)_L),$$

где в последнем неравенстве воспользовались доказанным в [5] неравенством $\|\omega_k(f;\ x,2h)\|_{l^1_{2n+1}}\leq C_k\tau_k(f;\ h)_L$ $(h\geq 2\pi/(2n+1))$. Оценка (9) для $b_\nu^{(n)}(f)$ получается аналогично. Теорема доказана.

3. Оценки для коэффициентов Фурье—Лагранжа. Из теоремы и свойства модуля $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$ легко получаются следующие утверждения.

Следствие 1. *Имеет место оценка* $(1\leq p\leq\infty)$

(22) $$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|;\ |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq C_k\tau_k(f;\ 1/\nu)_{L^p}.$$

При $k=1, p=1$ из последней оценки, учитывая 1) леммы 2, получается, что для любой интегрируемой по Риману функции f (см. [1, с. 25]) выполнено $a_\nu^{(n)}(f)\to 0$, $b_\nu^{(n)}(f)\to 0$ при $n\geq\nu\to\infty$. Из оценки (22) и 3) и 4) леммы 1 получаем

Следствие 2. *Если* $f\in W_p^k$, *то* $(1\leq p\leq\infty)$

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|,\ |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq C_k\nu^{-k}\omega_1(f^{(k)}:\ 1/\nu)_{L^p}.$$

Оценки (12) и (22) дают

Следствие 3. *Справедливо неравенство*

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|,\ |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq C_k\nu^{-1/p}\varkappa_{k,p}(f;\ \nu). \tag{23}$$

В частности, из (11), леммы 5 и последнего неравенства (23) получаем

Следствие 4 (см. [6]). *Если*

1) $V_p^*(f)<\infty$, *то* $\max(|a_\nu^{(n)}(f)|,\ |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq CV_p^*(f)\nu^{-1/p}$;

2) $V_p(f)<\infty$, *то* $\max(|a_\nu^{(n)}(f)|,\ |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq CV_p(f)\nu^{-1/p}$;

3) $V^{(k)}(f)<\infty$, *то* $\max(|a_\nu^{(n)}(f)|,\ |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq C_kV^{(k)}(f)\nu^{-1}$;

4) $f\in W_p^k$ *и* $V_p(f^{(k)})<\infty$, *то*

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|,\ |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq C_kV_p(f^{(k)})\nu^{-k-1/p}.$$

Лемма 8 и оценка (22) позволяют получить оценки для коэффициентов Фурье — Лагранжа (3) и через модули непрерывности и модули гладкости дробного порядка заданной функции f. Имеет место

Следствие 5. *Справедливы неравенства*

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|,\ |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq C_k\nu^{-1/p}\omega_{k-1/p}\left(f;\ \frac{2\pi(k+1)}{\nu}\right)_\nu,$$

$$\max(|a_\nu^{(n)}(f)|,\ |b_\nu^{(n)}(f)|)\leq C_k\nu^{-1/p}\omega_{k-1/p}\left(f;\ \frac{2\pi(k+1)}{\nu}\right).$$

Замечание 2. Для обычных коэффициентов Фурье $a_n(f)$ и $b_n(f)$ хорошо известно, что $\max(|a_n(f)|,\ |b_n(f)|)\leq C_k\omega_k(f;\ 1/n)_{L^p}$. Для коэффициентов Фурье — Лагранжа (3) оценки только через $\omega_k(f;\ \delta)_{L^p}$ нельзя получить, так как они определяются по значению функции f на конечной системе точек, а $\omega_k(f;\ \delta)_{L^p}$ не влияется изменением функции на любом множестве меры нуль. Характеристика $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$ в таком смысле более пригодна при характеризации величин, зависящих от значений функции f на дискретном множестве.

Замечание 3. В работе [2] нами получены оценки для величины (4) $(1<p<\infty)$ через модуль $\tau_k(f;\ \delta)_{L^p}$ функции f. Учитывая полученные связи этого модуля с другими характеристиками функции f, то для (4), как в п. 3 настоящей статьи, можно дать и оценки через эти характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. Т. II. Москва, 1965.
2. В. Х. Христов. О сходимости в среднем интерполяционных полиномов периодических функций. Препринт ОИЯИ, P5-81-317, 1981, 1—11.

3. V. A. Popov, A. S. Andreev. Steckin's type theorems for onesided trigonometrical and spline approximation. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **34**, 1978, 151—154.
4. А. Андреев, В. А. Попов, Бл. Сендов. Теоремы типа Джексона для наилучших односторонних приближений тригонометрическими многочленами и сплайнами. *Матем. заметки*, **26**, 1979, 791—804.
5. A. S. Andreev, V. A. Popov. Approximation of functions by means of linear summation operators in L_p. *Proc. Conf. Constructive function theory*, Budapest, 1980 (to appear).
6. А. А. Кельзон. О коэффициентах Фурье и коэффициентах Фурье — Лагранжа функций ограниченных высших вариаций. — *Доклады АН СССР*, **221**, 1975, 283—286.
7. В. А. Попов. Заметка об одностороннем приближении функций. *Доклады БАН*, 32, 1979, 1319—1322.
8. Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно-монотонных (в частности, рациональных) функций. *Матем. сборник*, **101**, 1976, 508—541.
9. V. A. Popov. On the connection between rational and spline approximation. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **27**, 1974, 623—626.
10. З. А. Чантурия. Модуль изменения функции и ее применение в теории ряда Фурье. *Доклады АН СССР*, **214**, 1974, 63—66.
11. В. Х. Христов, П. П. Петрушев. Сходимость ряда Фурье в пространстве Банаха. *Плиска*, **1**, 1977, 37—48.
12. J. Musielak. An application of the modulus of variation to trigonometric gap series. *Funct. et approxim.* (PRL), **7**, 1979, 129—133.
13. Б. И. Голубов. О функциях ограниченной p-вариации. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **32**, 1968, 837—858.
14. П. Л. Ульянов. Вложение некоторых классов функции H_p^{ω}. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **32**, 1968, 649—686.
15. Н. П. Корнейчук. Экстремальные задачи теории приближения, Москва, 1976.
16. Ю. Н. Субботин. Экстремальные задачи теории приближения функций при неполной информации. *Труды Матем. института АН СССР*, **145**, 1980, 152—168.
17. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. Москва, 1949.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 25. 5. 1981