PLISKA
STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ПРИБЛИЖЕНИЕ БУКВЫ Г АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КРИВЫМИ

ТОДОР П. БОЯНОВ

Приближения данной непрерывной кривой на плоскости часто получаются посредством ее фиксированного параметрического представления. При этом в случае алгебраических полиномиальных приближений n-ого порядка возникают следующие вопросы: а) является ли естественная параметризация „хорошей"; б) существует ли параметризация, которая позволяет получить наилучшие приближения для всех n. Оказывается, что ответы на эти вопросы отрицательные при приближении кривой, состоящей из двух равных перпендикулярных отрезков.

Основные результаты, связанные с хаусдорфовым приближением кривых на плоскости полиномиальными кривыми, изложены в монографии [1, 308—327].

1. В совокупности G всех компактных связанных множеств на плоскости можно ввести хаусдорфово расстояние следующим образом:

$$r(F_1, F_2)=\max\{\max_{a\in F_1}\min_{b\in F_2}\rho(a, b),\ \max_{b\in F_2}\min_{a\in F_1}\rho(a, b)\}, \tag{1}$$

где $F_1, F_2\in G$. Здесь $\rho(\cdot,\cdot)$ — некоторое расстояние на плоскости.

Обозначим, как обычно, через H_n множество всех алгебраических многочленов степени не выше n и пусть для $\gamma\in G$ существует представление

$$\gamma=\{(x, y): x=P(t),\ y=Q(t),\ t\in[-1, 1],\ P\in H_n,\ Q\in H_n\}. \tag{2}$$

Будем называть γ алгебрической полиномиальной кривой порядка n.

Совокупность всех элементов G, у которых имеется параметризация типа (2), обозначим через H_n^2.

Тогда наилучшее алгебраическое полиномиальное приближение $E(H_n^2;\ F)$ порядка n для $F\in G$ определяется как

$$E(H_n^2;\ F)=\inf\{r(\gamma, F): \gamma\in H_n^2\}. \tag{3}$$

Рассмотрим случай, когда в (1) $\rho(\cdot,\cdot)$ задается равенством $\rho((x, y)(\xi, \eta))=\max\{|x-\xi|, |y-\eta|\}$.

Пусть кривая $F\in G$ имеет параметрическое представление $F=\{\varphi, \psi\}$ или подробнее $F=\{x, y): x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[-1, 1]\}$. Обозначим через $P_{n,\varphi}$ и $Q_{n,\psi}$ алгебраические полиномы наилучшего равномерного приближения степени не выше n для функций φ и ψ соответственно и определим полиномиальную кривую $\gamma_{\varphi,\psi}$, имеющую параметрическое представление $\gamma_{\varphi,\psi}=\{P_{n,\varphi}, Q_{n,\psi}\}$. Исходя из (3), получаем неравенство $E(H_n^2;\ F)\leqq r(\gamma_{\varphi,\psi},\ F)$.

В связи с этим можно задать следующие вопросы:

а). Пусть φ и ψ задают естественную параметризацию спрямляемой кривой F. Насколько $r(\gamma_{\varphi,\psi}, F)$ больше, чем $E(H_n^2;\ F)$.

ПЛИСКА Български математически студии. Том 5, 1983, с. 40—42.

б. Существует ли параметрическое представление $F=\{\Phi, \Psi\}$, для которого при всех n $E(H_n^2;\ F)=r(\gamma_{\Phi,\Psi},\ F)$.

2. Рассмотрим кривую

(4) $$\Gamma=\{(x, y): x=(|t|+t)/2,\ y=(t-|t|)/2,\ t\in[-1, 1]\}.$$

Имеют место следующие утверждения.

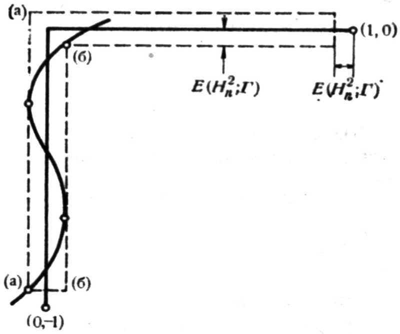

Рис. 1

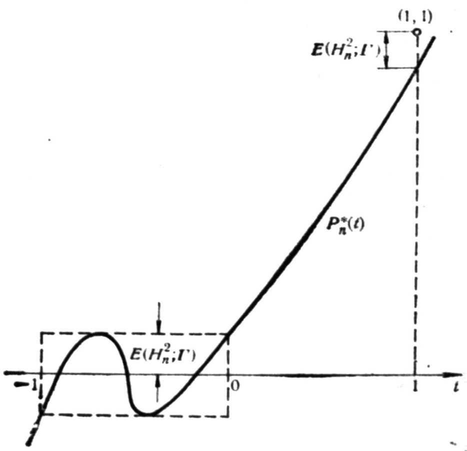

Рис. 2

Утверждение А. *Пусть* φ *и* ψ *задают естественную параметризацию кривой* Γ, *определенной* (4). *Тогда* $r(\gamma_{\varphi,\psi},\ \Gamma)\geqq c/n$, *в то время как* $E(H_n^2;\ \Gamma)=O(q^n)$, $0<q<1$.

Утверждение Б. *Пусть* $\Gamma=\{\Phi, \Psi\}$ — *произвольное фиксированное параметрическое представление кривой* Γ, *определенной* (4). *Существует* $n^*=n^*(\Phi, \Psi)$, *для которого* $E(H^2_{n^*};\ \Gamma)<r(\gamma_{\Phi,\Psi},\ \Gamma)$.

Утверждение В. *Алгебраическая полиномиальная кривая* γ_n^* *порядка* n, *которая осуществляет наилучшее хаусдорфовое приближение для* Γ, *определенной* (4), *имеет* $2n+1$ *точек типа альтернанса.*

На рис. 1 показан вид γ_n^*. Наилучшая кривая касает с чередованием $n+1$ раз отрезки (а)—(а) и (б)—(б); то же самое имеет место и для горизонтальной полосы, что дает $2n+1$ точек.

Доказательство утверждения В получается способом, аналогичным доказательству теоремы об альтернансе Чебышева. Из него следует, что $\gamma_n^*=\{P_n^*,\ Q_n^*\}$, где $P_n^*(t)$ — n-тый полином Чебышева $T_n(x)$, который трансформирован в интервале $[-1,0]$ и умножен подходящей константой (рис. 2) а $Q_n^*(t)=-P_n^*(-t)$.

Утверждения А и Б получаются отсюда как следствия.

3. Отметим, что аналогичным образом можно рассмотреть приближения кривой, состоящей из двух произвольных отрезков с одним общим концом, не лежащих на одной прямой, а также и приближения относительно евклидова расстояния $\rho(\cdot,\cdot)$ на плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Хаусдорфовые приближения. София, 1979.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 11. 1981