Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Pliska Studia Mathematica Bulgarica
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~pliska/
or contact: Editorial Office
Pliska Studia Mathematica Bulgarica
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: pliska@math.bas.bg

СВЯЗИ МЕЖДУ НАИЛУЧШИМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ И СПЛАЙН ПРИБЛИЖЕНИЯМИ В МЕТРИКЕ L_p

ПЕНЧО П. ПЕТРУШЕВ

Получены оценки наилучших рациональных (сплайн) приближений в L_p через наилучшие сплайн (рациональные) приближения в L_q, $1 \leqq p < q \leqq \infty$.

В этой статье получим некоторые связи между наилучшими рациональными и наилучшими кусочно-полиномиальными или сплайн приближениями функций в метрике L_p, $1 \leqq p \leqq \infty$. Докажем часть из результатов, анонсированных в [1].

1. Определения и обозначения. Будем рассматривать вещественные измеримые на конечном отрезке $[a, b]$ функции f. Как обычно, через $L_p = L_p[a, b]$ $(1 \leqq p < \infty)$ будем обозначать пространство функций f с конечной нормой $\|f\|_{L_p} = \|f\|_{L_p[a,b]} = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{1/p}$, а через $L_\infty = L_\infty[a, b]$ — множество существенно ограниченных на $[a, b]$ функций f с нормой $\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_{L_\infty[a,b]} = \operatorname{vraisup}\{|f(x)|: x \in [a, b]\}$. Через $C_{[a,b]}$ будем обозначать множество непрерывных на $[a, b]$ функций f с нормой $\|f\|_C = \max\{|f(x)|: x \in [a, b]\}$.

Обозначим через R_n множество всех рациональных функций n-того порядка, т. е. $q \in R_n$, если $q = p_1/p_2$, где p_1, p_2 — алгебраические полиномы n-той степени с действительными коэффициентами. Через $S(k, n, [a, b])$ будем обозначать множество всех кусочно-полиномиальных функций (сплайн функций с дефектом) k-той степени с $n+1$ (свободными) узлами на $[a, b]$, т. е. $\varphi \in S(k, n, [a, b])$, если существуют точки $\{x_i\}_{i=0}^n$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, такие, что на любом интервале $x_{i-1}, x_i)$ φ является полиномом k-той степени. В любой точке x_i будем считать, что функция φ непрерывна слева или справа. Тогда $\tilde{S}(k, n, [a, b]) = S(k, n, [a, b]) \cap C^{k-1}_{[a,b]}$ — множество сплайн функций k-той степени с $n+1$ узлами на $[a, b]$.

Обозначим через $R_n(f)_{L_p}$ и $E_n^k(f)_{L_p}$ наилучшие приближения функции $f \in L_p[a, b]$, $1 \leqq p \leqq \infty$, элементами соответственно R_n и $S(k, n, [a, b])$ в метрике L_p, т. е.

$$R_n(f)_{L_p} = \inf\{\|f - q\|_{L_p} : q \in R_n\}, \quad E_n^k(f)_{L_p} = \inf\{\|f - \varphi\|_{L_p} : \varphi \in S(k, n, [a,b])\}.$$

Через $R_n(f)_C$ и $E_n^k(f)_C$ будем обозначать наилучшие равномерные приближения функции $f \in C_{[a,b]}$ элементами соответственно R_n и $S(k, n, [a, b])$.

Всюду в дальнейшем через $C(\cdots)$, $C_1(\cdots)$, ... будем обозначать положительные „константы", зависящие только от параметров, стоящих в скобках.

Хорошо известно, см. [2], что нет существенной разницы (в порядках) между наилучшими кусочно-полиномиальными и наилучшими сплайн приближениями функций в метрике L_p. Так как кусочно-полиномиальные функции внешне более элементарный аппарат приближения, чем сплайны, то мы сфор-

ПЛИСКА Български математически студии. Том 5, 1983, с. 68—83.

мулируем и докажем только связи между рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями функций. Такие же связи верны с точностью до констант, если заменим кусочно-полиномиальные приближения соответствующими сплайн приближениями.

2. Известные и полученные результаты. В. А. Попов [3] получил следующую оценку:

Теорема А. *Пусть* $f \in C_{[1,0]}$. *Тогда*

$$E_n^0(f)_C \leq 2^7 n^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} R_\nu(f)_C \quad \text{при} \quad n \geq 1.$$

Сформулируем наши основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leq p < q \leq \infty$, $k \geq 0$, $\alpha > 0$ *и* $f \in L_q[a, b]$. *Тогда*

$$R_n(f)_{L_p} \leq C(p, q, k, \alpha).(b-a)^{1/p-1/q} n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha-1} E_\nu^k(f)_{L_p} \quad \text{при} \quad n \geq k,$$

где $C(p, q, k, \alpha) = C(k, \alpha)(1/p-1/q)^{-6(\alpha+2)}$, $1/q = 0$ *при* $q = \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leq p < q \leq \infty$, $k \geq 0$, $r \geq 0$, $0 < \alpha < r+1$ и $f \in L_q[a, b]$. *Тогда*

$$E_n^r(f)_{L_p} \leq C(p, q, r, \alpha)(b-a)^{1/p-1/q} n^{-\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{\alpha-1} R_\nu(f)_{L_p} \quad \text{при} \quad n \geq 1,$$

где $C(p, q, r, \alpha) = C(r)(1/q-1/q)^{-r-2}(r+1-\alpha)^{-r-1}$ и

$$E_n^r(f)_{L_p} \leq C(p, q, r, k, \alpha)(b-a)^{1/p-1/q} n^{-\alpha} \|f\|_{L_q} + \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha-1}.E_\nu^k(f)_{L_p}) \quad \text{при} \quad n \geq 1,$$

где $C(p, q, r, k, \alpha) = C(r, k)(1/p-1/q)^{-r-2}(r+1-\alpha)^{-r-1}$.

Замечание. В теоремах 1 и 2 существенно, что $p < q$. Случай $p = q$ до конца не выяснен и поэтому не будем его затрагивать.

3. Следствия. Обозначим

$$R(\lambda, p) = \{f \in L_p[0, 1] : R_n(f)_{L_p} = O(n^{-\lambda})\},$$

$$S_k(\lambda, p) = \{f \in L_p[0, 1] : E_n^{k-1}(f)_{L_p} = O(n^{-\lambda})\}.$$

Из теорем 1 и 2 получаем:

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $k \geq 1$, $r \geq 1$, $r > \lambda$. *Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon \leq p-1$ *имеем*

$$S_k(\lambda, p+\varepsilon) \subset R(\lambda, p) \subset S_r(\lambda, p-\varepsilon).$$

В [4] Ю. А. Брудный анонсировал следующие утверждения. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\lambda > 0$ и $q = (\lambda + 1/p)^{-1}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

(1) $\quad \mathrm{Lip}(\lambda, q+\varepsilon) \subset R(\lambda, p) \subset \mathrm{Lip}(\lambda, q-\varepsilon)$ (основной результат) и

(2) $\quad \mathrm{Lip}(\lambda, q+\varepsilon) \subset S_k(\lambda, p) \subset \mathrm{Lip}(\lambda, q-\varepsilon)$,

где $k > \lambda$, $\mathrm{Lip}(\lambda, q_1)$, $q_1 > 0$, множество функций f, для которых $\omega_k(f; \delta)_{q_1} = O(\delta^\lambda)$ при $\delta \to 0$, k — наименьшее целое число больше λ, $\omega_k(f; \delta)_{L_{q_1}} = \sup_{0<h\leq\delta} (\int_0^{1-kh} |\Delta_h^k f(x)|^{q_1} dx)^{1 q_1}$ — k-тый модуль гладкости функции f в L_{q_1}. Правое включение (1) и включения в (2) можно усилить, см. [4].

Из следствия 1 и (2) непосредственно следует справедливость включений (1) при $1<p<\infty$. Отметим, что теоремы 1 и 2 можно применять успешно для получения утверждений, подобных следствию 1 и (1), и для порядков общего типа, но не лучше степенных.

4. Доказательства сформулированных утверждений. Доказательству теоремы 1 предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Теорема 3. *Пусть* $1\leq p<q\leq\infty$, $f\in L_q[a, b]$ и $f, f', \ldots, f^{(r)}$ *монотонны на* (a, b), $r\geq 1$. *Тогда*

$$R_n(f)_{L_p}\leq C_1(p, q, r)\, n^{-r-1}\,\|f\|_{L_p[a,b]}(b-a)^{1/p-1/q} \quad \text{при} \quad n\geq 1, \tag{3}$$

где $C_1(p, q, r)=C_1(r)(1/p-1/q)^{-6(r+1)}$. *Если, кроме того,* $\|f\|_{C[a, b]}<\infty$, *то для любого* $n\geq 1$ *существует рациональная функция* $q_n\in R_n$, *такая, что*

$$\|f-q_n\|_{L_p[a, b]}\leq C_1(p, q, r)n^{-r-1}\|f\|_{L_q[a, b]}.(b-a)^{1/p-1/q} \quad \text{и} \tag{4}$$

$$\|q_n\|_{C(-\infty, \infty)}\leq n^{(r+1)/2}\|f\|_{C[a, b]}, \tag{5}$$

где $\|f\|_{C[a, b]}=\sup\{|f(x)|: x\in[a, b]\}$.

При доказательстве теоремы 3 будем пользоваться следующими утверждениями.

Лемма А. *Существует константа* $B>1$, *такая, что для любых положительных чисел* α, β *и* γ *существует рациональная функция* σ *порядка не выше* $B\ln(e+1/\gamma)\ln(e+\beta/\alpha)$, *такая, что*

$$|\sigma(x)|\leq\gamma \quad \text{при} \quad x\in(-\infty, -\alpha]\cap[-\beta, 0],$$

$$|1-\sigma(x)\leq\gamma \quad \text{при} \quad x\in[0, \beta]\cap[\alpha, \infty) \quad \text{и}$$

$$0\leq\sigma(x)\leq 1 \quad \text{при} \quad x\in(-\infty, \infty).$$

Лемма А следует непосредственно из результатов А. А. Гончара [5], см. [6, лемма 5].

Обозначим через $V_r=V_r(M, [a, b])$ множество функций f, заданных на отрезке $[a, b]$, у которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$ и $f^{(r-1)}$ является первообразной некоторой функции $f^{(r)}$ с ограниченной от M вариацией $(V_b^a f^{(r)}\leq M<\infty)$.

Теорема Б (В. А. Попов [7]). *Если* $M>0$, $[a, b]$ — *конечный отрезок и* $r\geq 1$, *то*

$$\sup\{R_n(f)_C: f\in V_r(M, [a, b])\}\leq C(r)\,M(b-a)^r\,n^{-r-1} \quad \text{при} \quad n\geq r.$$

Лемма 1. *Пусть* $g\in L_p(\Delta)$, $\Delta=[z_0, z_2]$, $1\leq p<\infty$, $z_1\in[z_0, z_2]$ *и существуют рациональные функции* p_0^*, p_1^*; $p_i^*\in R_{k_i}$, $k_i\geq 0$, $i=0, 1$, *такие, что*

$$\|g-p_i^*\|_{L_p[z_i, z_{i+1}]}\leq\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i\geq 0, \tag{6}$$

$$\|p_i^*\|_{C(-\infty, \infty)}\leq A_i, \quad 0\leq A_i<\infty, \quad i=0, 1. \tag{7}$$

Пусть $\delta>0$. *Тогда существует рациональная функция* q^* *порядка* $\leq k_0+k_1+Bp\ln^2(e+\max\{A_0, A_1\}.|\Delta|^{1/p}.\delta^{-1})$, *такая, что*

$$\|f-q^*\|_{L_p(\Delta)}\leq(\varepsilon_0^p+\varepsilon_1^p)^{1/p}+6\delta\leq\varepsilon_0+\varepsilon_1+6\delta, \tag{8}$$

$$\|q^*\|_{C(-\infty, \infty)}\leq\max\{A_0, A_1\}, \tag{9}$$

где $B>1$ — *абсолютная константа из леммы А.*

Доказательство. Если $\max\{A_0, A_1\}=0$, то положим $q^*\equiv 0$, и ввиду (6), (7) выполнены условия (8), (9).

Пусть $\max\{A_0, A_1\}=A>0$. Обозначим $\eta=\delta^p A^{-p}$ и рассмотрим рациональную функцию $q^*(x)=p_0^*(x)+\sigma(x-z_1)(p_1^*(x)-p_0^*(x))$, где σ — рациональная функция из леммы А при $\alpha=\eta$, $\beta=|\Delta|$, $\gamma=\delta A^{-1}|\Delta|^{-1/p}$. Рациональная функция σ, согласно лемме А, имеет порядок $\leq B\ln(e+A|\Delta|^{1/p}\delta^{-1})\ln(e+|\Delta|\eta^{-1})$ $=B\ln(e+A|\Delta|^{1/p}\delta^{-1})\ln(e+A^p|\Delta|\delta^{-p})\leq Bp\ln^2(e+A|\Delta|^{1/p}\delta^{-1})$. Тогда рациональная функция q^* будет иметь порядок $\leq k_0+k_1+Bp\ln^2(e+A|\Delta|^{1/p}\delta^{-1})$.

Так как $0\leq\sigma(x)\leq 1$ при $x\in(-\infty,\infty)$ и $\|p_i^*\|_{C(-\infty,\infty)}\leq A$, $i=0, 1$, то $\|q^*\|_{C(-\infty,\infty)}\leq A$, т. е. (9) выполнено.

Осталось оценить $\|g-q^*\|_{L_p(\Delta)}$. Имеем

$$\|g-q^*\|_{L_p(\Delta)}\leq\{\|g-q^*\|^p_{L_p([z_0, z_1-\eta]\cap\Delta)}+\|g-q^*\|^p_{L_p([z_1-\eta, z_1+\eta]\cap\Delta)}$$
$$+\|g-q^*\|^p_{L_p([z_1+\eta, z_2]\cap\Delta)}\}^{1/p}.$$

Оценим каждый из членов в фигурных скобках. Учитывая (6), (7) и свойства функции σ, получаем

$$\|g-q^*\|_{L_p([z_0, z_1-\eta]\cap\Delta)}\leq\|g-p_0^*\|_{L_p[z_0, z_1]}+\|\sigma(x-z_1)(p_1^*(x)-p_0^*(x))\|_{L_p([z_0, z_1-\eta]\cap\Delta)}$$
$$\leq\varepsilon_0+|\Delta|^{1/p}(A_0+A_1)\delta A^{-1}|\Delta|^{-1/p}\leq\varepsilon_0+2\delta.$$

Аналогично получаем $\|g-q^*\|_{L_p([z_1+\eta, z_2]\cap\Delta)}\leq\varepsilon_1+2\delta$. Кроме того, $\|g\|q-q^*\|_{L_p([z_1-\eta, z_1+\eta]\cap\Delta)}\leq(2\eta)^{1/p}A\leq 2^{1/p}\delta\leq 2\delta$. Следовательно,

$\|g-q^*\|_{L_p(\Delta)}\leq((\varepsilon_0+2\delta)^p+(\varepsilon_1+2\delta)^p+(2\delta)^p)^{1/p}\leq(\varepsilon_0^p+\varepsilon_1^p)^{1/p}+(3(2\delta)^p)^{1/p}\leq(\varepsilon_0^p+\varepsilon_1^p)^{1/p}+6\delta$.

Этим лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Сначала докажем, что если теорема 3 верна в случае, когда $[a, b]=[0, 1]$ и $\|f\|_{L_q[0,1]}=1$, то она верна и в общем случае.

Действительно, пусть теорема 3 верна в случае $[a, b]=[0, 1]$ и $\|f\|_{L_q[0,1]}=1$. Пусть функция f удовлетворяет предположению теоремы 3 в общем случае, где $\|f\|_{L_q[a, b]}>0$. Если $\|f\|_{L_q[a, b]}=0$, то теорема 3 очевидно верна. Рассмотрим функцию

$$g(x)=(b-a)^{1/q}(\|f\|_{L_q[a, b]})^{-1}f(a+(b-a)x).$$

Очевидно $g, g', \ldots, g^{(r)}$ монотонны на $(0, 1)$,

$$\|g\|_{L_q[0, 1]}=(\|f\|_{L_q[a,b]})^{-1}\left(\int_0^1|f(a+(b-a)x)|^q\,d(a+(b-a)x)\right)^{1/q}=1 \text{ и } \|g\|_{C[0,1]}<\infty.$$

Тогда из сделанного предположения следует, что для любого $n\geq 1$ существует рациональная функция $p_n\in R_n$, такая, что

$$\|g-p_n\|_{L_p[0, 1]}\leq C_1(p, q, r)n^{-r-1}, \quad C_1(p, q, r)=C_1(r)(1/p-1/q)^{-6(r+1)} \text{ и}$$
$$\|p_n\|_{C(-\infty,\infty)}\leq 2n^{(r+1)/2}\|g\|_{C[0,1]}.$$

Положим $q_n(x)=\|f\|_{L_q[a, b]}(b-a)^{-1/q}p_n((x-a)/(b-a))$, $q_n\in R_n$. Так как

$$\|g_n-p_n\|_{L_p[0,1]}=(b-a)^{1/q}(\|f\|_{L_q[a,b]})^{-1}\ (\int_0^1|f(a+(b-a)x)$$

$$-\|f\|_{L_q}(b-a)^{-1/q}p_n(x)|^p dx)^{1/p}=(b-a)^{1/q-1/p}(\|f\|_{L_q})^{-1}\|f-q_n\|_{L_p[a,b]},$$

(то $\|f-q_n\|_{L_p[a,b]}\leqq C_1(p,\ q,\ r)n^{-r-1}\|f\|_{L_q[a,b]}\,(b-a)^{1/p-1/q}$. С другой стороны,

$$\|q_n\|_{C(-\infty,\infty)}=\|f\|_{L_p}(b-a)^{-1/q}\|p_n\|_{C(-\infty,\infty)}\leqq 2n^{(r+1)/2}\|f\|_{L_q}(b-a)^{-1/q}\|g\|_{C[0,1]}$$

$$=2n^{(r+1)/2}\|f\|_{C[a,b]}.$$

Этим оценки (4), (5) доказаны. Следовательно, теорема 3 верна и в общем случае.

Докажем теорему 3 в случае, когда $[a,\ b]=[0,\ 1]$ и $\|f\|_{L_q[0,1]}=1$. Пусть $1\leqq p<q\leqq\infty$, $f\in L_q[0,\ 1]$, $\|f\|_{L_q[0,1]}=1$ и $f, f', f'', \ldots, f^{(r)}$ монотонны на $(0,1)$, $r\geqq 1$. Не ограничивая общности доказательства, будем считать, что $q<\infty$ и $f^{(r)}$ непрерывна на $(0,\ 1)$.

Обозначим $x_i=1/2^i$, $z_i=1-1/2^i$, $i=1,\ 2,\ldots$ Оценим $|f(x_i)|$ и $|f(z_i)|$, $i\geqq 1$. Так как функция f монотонна на $(0,\ 1)$ и $0<x_i\leqq 1/2$, то $1=\int_0^1|f(x)|^q dx \geqq|f(x_i)|^q x_i$ и, следовательно,

$$|f(x_i)|\leqq 2^{i/q},\quad i\geqq 1. \tag{10}$$

Аналогично получаем

$$|f(z_i)|\leqq 2^{i/q},\quad i\geqq 1. \tag{11}$$

Оценим $|f'(x_i)|$ и $|f'(z_i)|$, $i\geqq 1$. Из монотонности функции f' следует, что функция f выпукла вверх или вниз на $(0,\ 1)$. Тогда ясно, что

$$|f'(x_i)|\leqq\max\{|f(x_i)-f(x_{i+1}))/(x_i-x_{i+1})|,\quad |(f(x_i)-f(x_{i-1}))/(x_i-x_{i-1})|\},\quad i\geqq 2,$$

$$|f'(x_i)|\leqq\max\{|f(f(x_1)-f(x_2))/(x_1-x_2)|,\quad |(f(z_1)-f(z_2))/(z_1-z_2)|\}.$$

Учитывая (10) и (11), получаем

$$|f'(x_i)|\leqq(2^{(i+1)/q}+2^{i/q})/(1/2^{i+1})<2^3 2^{i(1+1/q)},\quad i\geqq 1. \tag{12}$$

Аналогично

$$|f'(z_i)|\leqq 2^3 2^{i(1+1/q)},\quad i\geqq 1. \tag{13}$$

Аналогичным образом, используя (12) и (13), получаем

$$\begin{gathered}|f''(x_i)|\leqq 2^7 2^{i(2+1/q)}\ \text{и}\\ |f''(z_i)|\leqq 2^7 2^{i(2+1/q)},\quad i\geqq 1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ |f^{(r)}(x_i)|\geqq 2^{(r+2)^2}\ 2^{i(r+1/q)},\\ |f^{(r)}(z_i)|\leqq 2^{(r+2)^2}\ 2^{i(r+1/q)},\quad i\geqq 1.\end{gathered} \tag{14}$$

Пусть $n\geqq 1$. Положим $\lambda=1/p-1/q$. Рассмотрим сначала случай, когда $1\leqq n\leqq A=e^{32}B^2(r+1)^6\lambda^{-6}$, где $B>1$ — константа из леммы А. Положим $q_n=0$. Имеем

$$\|f-q_n\|_{L_p[0,\,1]}=\|f\|_{L_p[0,1]}\leq\|f\|_{L_q[0,\,1]}=1\leq(e^{32}B^2(r+1)^6\lambda^{-6})^{r+1}n^{-r-1}$$

и, следовательно,

$$\|f-q_n\|_{L_p[0,\,1]}\leq C_2(r)(1/p-1/q)^{-6(r+1)}n^{-r-1}, \tag{15}$$

$$\|q_n\|_{C(-\infty,\,\infty)}=0,\ q_n\in R_0,\quad 1\leq n\leq A.$$

Пусть $n>A=e^{32}B^2(r+1)^6\lambda^{-6}$. Пусть s — натуральное число, такое, что $n^{-2(r+1)/\lambda}\leq 2^{-s}\leq 2n^{-2(r+1)/\lambda}$. Обозначим $\Delta_i=[x_{i+1},\ x_i]$, $\tilde{\Delta}_i=[z_i,\ z_{i+1}]$, $i=1,2,\ldots,s$, $\Delta_{s+1}=[0,\ 2^{-s-1}]$, $\tilde{\Delta}_{s+1}=[1-2^{-s-1},\ 1]$. Положим $k_i=[(\ln 2)\lambda n/(32(r+1)2^{i\lambda/(2(r+1))})]$, $\tilde{k}_i=k_i$, $i=1,\ 2,\ldots,\ s$, $k_{s+1}=\tilde{k}_{s+1}=0$. Из ограничения для n и определения s следует, что $k_i=\tilde{k}_i\geq r$, $i=1,\ 2,\ldots,\ s$. Тогда, применяя теорему Б для функции f на отрезке Δ_i, $1\leq i\leq s$, и учитывая (14), получаем, что существует рациональная функция $q_i\in R_{k_i}$, такая, что

$$\|f-q_i\|_{C(\Delta_i)}\leq C(r)(V_{\Delta_i}f^{(r)})|\Delta_i|^r\ k_i^{-r-1}\leq C(r)(|f^{(r)}(x_{i+1})|+|f^{(r)}(x_i)|)|\Delta_i|^r k_i^{-r-1}$$
$$\leq C(r)\,2^{(r+2)^2+r+2}\,2^{i(r+1/q)}\,2^{-(i+1)r}\,k_i^{-r-1}.$$

Следовательно,

$$\|f-q_i\|_{C(\Delta_i)}\leq C_3(r)2^{i(1/q+\lambda/2)}\lambda^{-r-1}n^{-r-1},\quad q_i\in K_{k_i},\quad i=1,\ 2,\ldots,\ s. \tag{16}$$

Пусть $1\leq i\leq s$, $\|f\|_{C(\Delta_i)}>0$ и $\|q_i\|_{C(\Delta_i)}\leq 2\|f\|_{C(\Delta_i)}$. Положим $Q_i=q_i/(1+\eta_i q_i^2)$, $\eta_i=4^{-1}n^{-r-1}\|f\|^{-2}_{C(\Delta_i)}$. Очевидно $Q_i\in R_{2k_i}$ и

$$\|Q_i\|_{C(-\infty,\,\infty)}\leq 1/(2\sqrt{\eta_i})=n^{(r+1)/2}\|f\|_{C(\Delta_i)}\leq 2n^{(r+1)/2}2^{i/q}. \tag{17}$$

Оценим $\|f-Q_i\|_{L_p(\Delta_i)}$. Учитывая (12), (16) и факт, что f монотонна, получаем

$$\|f-Q_i\|_{L_p(\Delta_i)}\leq|\Delta_i|^{1/p}\|f-Q_i\|_{C(\Delta_i)}\leq 2^{-i/p}(\|f-q_i\|_{C(\Delta_i)}+\eta_i\|f\|_{C(\Delta_i)}\|q_i\|^2_{C(\Delta_i)})$$
$$\leq 2^{-i/p}(\|f-q_i\|_{C(\Delta_i)}+4\eta_i\|f\|^3_{C(\Delta_i)})\leq 2^{-i/p}(C_3(r)2^{i(1/q+\lambda/2)}\eta^{-r-1}n^{-r-1}+\|f\|_{C(\Delta_i)}n^{-r-1})$$
$$\leq C_4(r)\lambda^{-r-1}2^{-i\lambda/2}n^{-r-1},$$

т. е.

$$\|f-Q_i\|_{L_p(\Delta_i)}\leq C_4(r)\lambda^{-r-1}2^{+i\lambda/2}n^{-r-1}. \tag{18}$$

Если $\|q_i\|_{C(\Delta_i)}>2\|f\|_{C(\Delta_i)}$, то положим $Q_i\equiv 0$. Ввиду (16) получаем

$$\begin{aligned}\|f-Q_i\|_{L_p(\Delta_i)}&=|\Delta_i|^{-p}\|f\|_{C(\Delta_i)}\leq|\Delta_i|^{1/p}(\|q_i\|_{C(\Delta_i)}-\|f\|_{C(\Delta_i)})\\&\leq|\Delta_i|^{1/p}\|f-q_i\|_{C(\Delta_i)}\leq C_3(r)\lambda^{-r-1}2^{-i\lambda/2}n^{-r-1}.\end{aligned} \tag{19}$$

Случай, когда $\|f\|_{C(\Delta_i)}=0$, содержится в предыдущем случае.

Из сделанных выкладок (см. (17)–(19)) следует, что для любого i, $1\leq i\leq s$, существует рациональная функция $Q_i\in R_{2k_i}$, $k_i=[(\ln 2)\lambda\ n/(32(r+1)2^{i\lambda/(2(r+1))})]$, такая, что

$$\|f-Q_i\|_{L_p(\Delta_i)}\leq C_5(r)\lambda^{-r-1}2^{-i\lambda/2}n^{-r-1} \tag{20}$$

и

(21) $$\|Q_i\|_{C(-\infty,\ \infty)} \leqq n^{(r+1)/2}\| f \|_{C(\Delta_i)} \leqq 2n^{(r+1)/2}2^{s/q}.$$

Аналогично для любого i, $1 \leqq i \leqq s$, существует рациональная функция $\tilde{Q}_i \in R_{2\tilde{k}_i}$, $\tilde{k}_i = k_i$, такая, что

(22) $$\|f-\tilde{Q}_i\|_{L_p(\tilde{\Delta}_i)} \leqq C_5(r)\lambda^{-r-1}2^{-i\lambda/2}n^{-r-1}$$

и

(23) $$\|\tilde{Q}_i\|_{C(-\infty,\ \infty)} \leqq n^{(r+1)/2}\| f \|_{C(\tilde{\Delta}_i)}.$$

Положим $Q_{s+1}(x) \equiv 0$ и $\tilde{Q}_{s+1}(x) \equiv 0$. Имеем

(24) $$\begin{aligned}&\| f - Q_{s+1}\|_{L_p(\Delta_{s+1})} = \| f \|_{L_p(\Delta_{s+1})} \leqq \| f \|_{L_q(\Delta_{s+1})} \mid \Delta_{s+1} \mid^{1/p-1/q}\\ &\leqq 2^{-(s+1)\lambda} \leqq 2^{-(s+1)\lambda/2}n^{-r-1}, \quad Q_{s+1} \in R_0.\end{aligned}$$

Аналогично

(25) $$\| f - \tilde{Q}_{s+1}\|_{L_p(\tilde{\Delta}_{s+1})} \leqq 2^{-(s+1)\lambda/2}n^{-r-1}, \quad \tilde{Q}_{s+1} \in R_0.$$

В дальнейшем будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть* $2 \leqq i \leqq s+1$ *и существует рациональная функция* P_i *порядка* $\leqq \sum_{\nu=i}^{s} 2k_\nu + 16(r+1)^2 B\lambda^{-2}(s-i+1)\ln^2 n$ *такая, что*

(26) $$\| f - P_i\|_{L_p[0,\ x_i]} \leqq \sum_{\nu=i}^{s+1} (C_5(r)+6)\lambda^{-r-1}2^{-\lambda\nu/2}n^{-r-1}$$

и

(27) $$\|P_i\|_{C(-\infty,\ \infty)} \leqq n^{(r+1)/2}\| f \|_{C[x_{s+1},\ z_{s+1}]} \leqq 2n^{(r+1)/2}\, 2^{s/q}.$$

Тогда существует рациональная функция P_{i-1} *порядка* $\leqq \sum_{\nu=i-1}^{s} 2k_\nu + 16(r+1)^2 B\lambda^{-2}(s-i+2)\ln^2 n$, *такая, что*

$$\| f - P_{i-1}\|_{L_p[0,\ x_{i-1}]} \leqq \sum_{\nu=i-1}^{s+1} (C_5(r)+6)\lambda^{-r-1}2^{-\lambda\nu/2}\, n^{-r-1}$$

и

$$\|P_{i-1}\|_{C(-\infty,\ \infty)} \leqq n^{(r+1)/2}\| f \|_{C[x_{s+1},\ z_{s+1}]} \leqq 2n^{(r+1)/2}2^{s/q}.$$

Доказательство. Применяя лемму 1 при $g=f$, $z_0=0$, $z_1=x_i$, $z_2=x_{i-1}$), $p_0^*=p_i$, $p_1^*=Q_{i-1}$, $\delta=\lambda^{-r-1}2^{-\lambda(i-1)/2}n^{-r-1}$ и учитывая (20), (21), (26), (27), получаем, что существует рациональная функция P_{i-1} порядка

$$\leqq \sum_{\nu=i}^{s} 2k_\nu + 16(r+1)^2 B\lambda^{-2}(s-i+1)\ln^2 n + 2k_{i-1} + Bp\ln^2(e+2n^{(r+1)/2}2^{s/q}(2^{-i+1})^{1/p}\delta^{-1}),$$

такая, что

$$\|f-P_{i-1}\|_{L_p[0,\,x_{i-1}]}\le\sum_{\nu=i}^{s+1}(C_5(r)+6)\lambda^{-r-1}2^{-\lambda\nu/2}n^{-r-1}$$

$$+C_5(r)^{-r-1}2^{-\lambda(i-1)/2}n^{-r-1}+6\lambda^{-r-1}2^{-\lambda(i-1)/2}n^{-r-1}$$

$$\le\sum_{\nu=i-1}^{s+1}(C_5(r)+6)\lambda^{-r-1}2^{-\lambda\nu/2}n^{-r-1}$$

и

$$\|P_{i-1}\|_{C(-\infty,\,\infty)}\le n^{(r+1)/2}\,\|f\|_{C[x_{s+1},\,z_{s+1}]}\le 2n^{(r+1)/2}\,2^{s/q}.$$

Поскольку $2^s\le n^{2(r+1)/\lambda}$, то порядок рациональной функции P_{i-1}

$$\le\sum_{\nu=i-1}^{s}2k_\nu+16(r+1)^2B\lambda^{-2}(s-i+1)\ln^2 n+Bp\ln^2(e+2n^{3(r+1)/2}2^{s/p})$$

$$\le\sum_{\nu=i-1}^{s}2k_\nu+16(r+1)^2B\lambda^{-2}(s-i+1)\ln^2 n+Bp\ln^2(n^{4(r+1)/\lambda p})$$

$$\le\sum_{\nu=i-1}^{s}2k_\nu+16(r+1)^2B\lambda^{-2}(s-i+2)\ln^2 n.$$

Лемма 2 доказана.

З а к а н ч и в а е м д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Применяя последовательно s раз лемму 2, начиная отрезком $[0,\,x_{s+1}]$ и рациональной функцией Q_{s+1} (см. (24)), получаем, что существует рациональная функция P_1 порядка $\le\sum_{\nu=1}^{s}2k_\nu+16(r+1)^2B\lambda^{-2}s\ln^2 n$, такая, что

$$\|f-P_1\|_{L_p[0,\,1/2]}\le\sum_{\nu=1}^{s+1}(C_5(r)+6)\lambda^{-r-1}2^{-\lambda\nu/2}n^{-r-1}\tag{28}$$

и

$$\|P_1\|_{C(-\infty,\,\infty)}\le n^{(r+1)/2}\,\|f\|_{C[x_{s+1},z_{s+1}]}\le 2n^{(r+1)/2}2^{s/q}.\tag{29}$$

Аналогично из (22), (23), (25), используя лемму 1, получаем, что существует рациональная функция $\tilde P_1$ порядка $\le\sum_{\nu=1}^{s}2\tilde k_\nu+16(r+1)^2B\lambda^{-2}s\ln^2 n$, такая, что

$$\|f-\tilde P_1\|_{L_p[1/2,\,1]}\le\sum_{\nu=1}^{s}(C_5(r)+6)\lambda^{-r-1}2^{-\lambda\nu/2}n^{-r-1}\tag{30}$$

и

$$\|\tilde P_1\|_{C(-\infty,\,\infty)}\le n^{(r+1)/2}\|f\|_{C[x_{s+1},\,z_{s+1}]}\le 2n^{(r+1)/2}2^{s/q}.\tag{31}$$

Применим лемму 1 при $g=f$, $z_0=0$, $z_1=1/2$, $z_2=1$, $p_0^*=P_1$, $p_1^*=\tilde P_1$, $\delta=n^{-r-1}$. Учитывая (28)—(31), получаем, что существует рациональная функция q_n порядка

$$\le\sum_{\nu=1}^{s}2k_\nu+16(r+1)^2B\lambda^{-2}s\ln^2 n+\sum_{\nu=1}^{s}2k_\nu^*+16(r+1)^2B\lambda^{-2}s\ln^2 n$$

$$+Bp\ln^2(e+2n^{(r+1)/2}2^{s/q}n^{r+1})\le 4\sum_{\nu=1}^{s}k_\nu+16(r+1)^2B\lambda^{-2}(2s+1)\ln^2 n,$$

такая, что

$$\|f-q_n\|_{L_p[0,1]}\leqq 2\sum_{\nu=1}^{s+1}(C_5(r)+6)\lambda^{-r-1}2^{-\lambda\nu/2}n^{-r-1}+6n^{-r-1} \tag{32}$$

и

$$\|q_n\|_{C(-\infty,\infty)}\leqq n^{(r+1)/2}\|f\|_{C[x_{s+1},z_{s+1}]}\leqq n^{(r+1)/2}\|f\|_{C[0,1]}.$$

Оценим порядок рациональной функции q_n. Поскольку $2^s\leqq n^{2(r+1)/\lambda}$, $n>A=e^{32}B^2(r+1)^6\lambda^{-6}$ и $\ln^3<\sqrt{n}$ при $n\geqq e^{32}$, то

$$4\sum_{\nu=1}^{s}k_\nu+16(r+1)^2B\lambda^{-2}(2s+1)\ln^2 n\leqq 4\sum_{\nu=1}^{s}(\ln 2)\lambda n/(32(r+1)2^{\nu\lambda/2(r+1)})$$

$$+144(r+1)^3B\lambda^{-3}\ln^3 n\leqq\frac{(\ln 2)\lambda n}{8(r+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}(2^{-\lambda/(2(r+1))})^\nu+144(r+1)^3B\lambda^{-3}\sqrt{n}$$

$$\leqq(\ln 2)\lambda n/(8(r+1)(e^{(\ln 2)\lambda/2(r+1)}-1)+n/2\leqq n.$$

Следовательно, $q_n\in R_n$.

Осталось оценить $\|f-q_n\|_{L_p[0,1]}$. Из (32) имеем

$$\|f-q_n\|_{L_p[0,1]}\leqq C_6(r)\lambda^{-r-1}n^{-r-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(2^{-\lambda/2})^\nu$$

$$\leqq C_6(r)\lambda^{-r-1}n^{-r-1}/(e^{\lambda\ln 2/2}-1)\leqq C_7(r)\lambda^{-r-2}n^{-r-1}.$$

Следовательно, для любого $n>A$ существует рациональная функция $q_n\in R_n$, такая, что $\|f-q_n\|_{L_p[0,1]}\leqq C_7(r)\lambda^{-r-2}n^{-r-1}$ и $\|q_n\|_{C(-\infty,\infty)}\leqq n^{(r+1)/2}\|f\|_{C[0,1]}$. Ввиду (15) теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть* $1\leqq p<q\leqq\infty$, $f\in L_q[a,b]$ *и существуют точки* $\{x_i\}_{i=0}^m$, $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$, *такие, что* $f, f', f'', \ldots, f^{(r)}$ *монотонны на любом интервале* (x_i, x_{i+1}), $0\leqq i\leqq m-1$, $r\geqq 1$. *Тогда* $R_n(f)_{L_p}\leqq C_2(p,q,r)\|f\|_{L_q[a,b]}(b-a)^{1/p-1/q}m^{r+1}n^{-r-1}$ *при* $n\geqq 1$, *где* $C_2(p,q,r)=C_2(r)(1/p-1/q)^{-6(r+1)}$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3 ясно, что для доказательства теоремы 4 достаточно рассмотреть случай, когда $[a,b]=[0,1]$ и $\|f\|_{L_q[0,1]}=1$, $q<\infty$. Кроме того, очевидно, если теорема 4 верна для $m=2^s$, s — целое, то она верна и для любого m, заменяя константу $C_2(p,q,r)$ на $2^{r+1}C_2(p,q,r)$.

Пусть функция удовлетворяет предположения теоремы 4 при $[a,b]=[0,1]$, $\|f\|_{L_p[0,1]}=1$, $q<\infty$ и $m=2^s$, s — целое неотрицательное. Пусть $n\geqq 1$. Обозначим $\lambda=1/p-1/q$. Рассмотрим случай, когда $1\leqq n\leqq A=2^{24}B^2(r+1)^4\lambda^{-6}m$, где $B>1$ константа из леммы A. Очевидно

$$R_n(f)_{L_p[0,1]}\leqq\|f\|_{L_p[0,1]}\leqq\|f\|_{L_q[0,1]}=1\leqq(2^{24}B^2(r+1)^2\lambda^{-6}m)^{r+1}n^{-r-1}$$

Следовательно,

$$R_n(f)_{L_p}\leqq C_8(r)\lambda^{-6(r+1)}m^{r+1}n^{-r-1}\quad\text{при}\quad 1\leqq n\leqq A. \tag{33}$$

Пусть $n>A=2^{24}B^2(r+1)^4\lambda^{-6}m$. Положим $k=[n/2m]$. Обозначим $\Delta_i=[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, \ldots, m-1$. Доказательство теоремы 4 в этом случае разобьем в несколько лемм.

Лемма 3. *Для любого i, $0 \leq i \leq m-1$ существует рациональная функция p_i порядка*

$$\leq k + 2Bp \ln^2(e + (m \| f \|^p_{L_q(\Delta_i)} | \Delta_i |^{1-p/q})^{1/(1-p/q)} k^{3(r+1)/\lambda}),$$

такая, что

(34) $$\| f - p_i \|_{L_p(\Delta_i)} \leq C_4(p, q, r) \| f \|_{L_q(\Delta_i)} | \Delta_i |^{1/p-1/q} k^{-r-1} + 2m^{-1/p} k^{-r-1}$$

и

(35) $$\| p_i \|_{C(-\infty, \infty)} \leq \| f \|_{L_1(\Delta_i)} (m \| f \|^p_{L_q(\Delta_i)})^{1/(1-p/q)} k^{2(r+1)\lambda},$$

где $C_4(p, q, r) = C_4(r) \lambda^{-6(r+1)}$.

Доказательство. Пусть $0 \leq i \leq m-1$. Если $\| f \|_{L_q(\Delta_i)} = 0$, то $f(x) = 0$ при $x \in (x_i, x_{i+1})$. Положим $p_i \equiv 0$. Рациональная функция при $p_i \in R_0$ очевидно удовлетворяет (34), (35).

Пусть $\| f \|_{L_q(\Delta_i)} > 0$. Положим $d_i = (mk^{(r+1)p} \| f \|^p_{L_q(\Delta_i)})^{-1/(1-p/q)}$. Если $| \Delta_i | \leq 2d_i$, то, полагая $p_i \equiv 0$, имеем

$$\| f - p_i \|_{L_p(\Delta_i)} = \| f \|_{L_p(\Delta_i)} \leq \| f \|_{L_q(\Delta_i)} | \Delta_i |^{1/p-1/q}$$

$$\leq 2 \| f \|_{L_q(\Delta_i)} d_i^{1/p-1/q} = 2 \| f \|_{L_q(\Delta_i)} (mk^{(r+1)p} \| f \|^p_{L_q(\Delta_i)})^{-1/p}.$$

Следовательно, $\| f - p_i \|_{L_p(\Delta_i)} \leq 2m^{-1/p} k^{-r-1}$, т. е. справедлива оценка (34). Оценка (35) очевидно тоже верна. Этим случай $| \Delta_i | \leq 2d_i$ закончен.

Пусть $| \Delta_i | > 2d_i$, $\| f \|_{L_q(\Delta_i)} > 0$. Обозначим $u_0 = x_i$, $u_1 = x_i + d_i$, $u_2 = x_{i+1} - d_i$ $u_3 = x_{i+1}$. Положим $q_1 \equiv 0$ и $q_3 \equiv 0$, $q_1, q_3 \in R_0$. Имеем

(36) $$\| f - q_1 \|_{L_p[u_0, u_1]} = \| f \|_{L_p[u_0, u_1]} \leq \| f \|_{L_q(\Delta_i)} d_i^{1/p-1/q} = m^{-1/p} k^{-r-1},$$

(37) $$\| f - q_3 \|_{L_p[u_2, u_3]} = \| f \|_{L_p[u_2, u_3]} \leq m^{-1/p} k^{-r-1}.$$

Рассмотрим функцию f на $[u_1, u_2]$. Так как f монотонна на (x_i, x_{i+1}), то $\| f \|_{C[u_1, u_2[} d_i \leq \| f \|_{L_1(\Delta_i)}$. Следовательно,

(38) $$\| f \|_{C[u_1, u_2]} \leq \| f \|_{L_1(\Delta_i)} (mk^{(r+1)p} \| f \|^p_{L_q(\Delta_i)})^{1/(1-p/q)}.$$

Тогда, согласно теореме 3, существует рациональная функция $q_2 \in R_k$, такая, что

(39) $$\| f - q_2 \|_{L_q[u_1, u_2]} \leq C_1(p, q, r) \| f \|_{L_q[u_1, u_2[} (u_2 - u_1)^{1/p-1/q} k^{-r-1}$$

$$\leq C_1(p, q, r) \| f \|_{L_q(\Delta_i)} | \Delta_i |^{1/p-1/q} k^{-r-1}, \quad C_1(p, q, r) = C_1(r) \lambda^{-6(r+1)}$$

и

(40) $$\| q_2 \|_{C(-\infty, \infty)} \leq k^{(r+1)/2} \| f \|_{C[u_1, u_2]}$$

$$\leq k^{(r+1)/2} \| f \|_{L_1(\Delta_i)} (mk^{(r+1)p} \| f \|_{L_q(\Delta_i)})^{1/(1-p/q)} \leq \| f \|_{L_1(\Delta_i)} (m \| f \|^p_{L_q(\Delta_i)})^{1/(1-p/q)} k^{2(r+1)/\lambda}.$$

Здесь использовали и (38).

Применяя лемму 1 при $g = f$, $z_0 = u_0$, $z_1 = u_1$, $z_2 = u_2$, $p_0^* = q_1$, $p_1^* = q_2$, $\delta = \| f \|_{L_1(\Delta_i)} | \Delta_i |^{-1+1/p} k^{-r-1}$ и учитывая (36), (39) и (40), получаем, что существует рациональная функция $\bar{q}$ порядка

$$\leq k+Bp\ln^2(e+\|f\|_{L_1(\Delta_i)}(m\|f\|^p_{L_q(\Delta_i)})^{1/(1-p/q)}k^{2(r+1)/\lambda}(z_2-z_0)^{1/p}$$

$$\times\|f\|^{-1}_{L_1(\Delta_i)}|\Delta_i|^{1-1/p}k^{r+1})$$

$$\leq k+Bp\ln^2(e+(m\|f\|^p_{L_q(\Delta_i)}|\Delta_i|^{1-p/q})^{1/(1-p/q)}k^{3(r+1)/\lambda}),$$

такая, что

(41) $$\|f-\bar{q}\|_{L_p[u_0,u_2]}\leq m^{-1/p}k^{-r-1}+C_1(p,q,r)\|f\|_{L_q(\Delta_i)}|\Delta_i|^{1/p-1/q}k^{-r-1}$$

$$+6\|f\|_{L_1(\Delta_i)}|\Delta_i|^{-1+1/p}k^{-r-1}\leq(C_1(p,q,r)+6)\|f\|_{L_q(\Delta_i)}|\Delta_i|^{1/p-1/q}k^{-r-1}+m^{-1/p}k^{-r-1},$$

(42) $$\|\bar{q}\|_{C(-\infty,\infty)}\leq\|f\|_{L_1(\Delta_i}(m\|f\|^p_{L_q(\Delta_i)})^{1/(1-p/q)}k^{2(r+1)\lambda}.$$

Теперь применим лемму 1 при $g=f$, $z_0=u_0$, $z_1=u_2$, $z_2=u_3$, $p_0^*=\bar{q}$, $p_1^*=q_3$, $\delta=\|f\|_{L_1(\Delta_i)}|\Delta_i|^{-1+1/p}k^{-r-1}$. Имея в виду (37), (41) и (42), получаем, что существует рациональная функция p_i порядка

$$\leq k+Bp\ln^2(e+(m\|f\|^p_{L_q(\Delta_i)}|\Delta_i|^{1-p/q})^{1/(1-p/q)}k^{3(r+1)/\lambda})$$

$$+Bp\ln^2(e+\|f\|_{L_1(\Delta_i)}(m\|f\|^p_{L_q(\Delta_i)})^{1/(1-p/q)}k^{2(r+1)/\lambda}(z_2-z_0)^{1/p}\delta^{-1})$$

$$\leq k+2B\ln^2(e+(m\|f\|^p_{L_q(\Delta_i)}|\Delta_i|^{1-p/q})^{1/(1-p/q)}k^{3(r+1)/\lambda}),$$

такая, что

$$\|f-p_i\|_{L_p(\Delta_i)}\leq(C_1(p,q,r)+6)\|f\|_{L_q(\Delta_i)}|\Delta_i|^{1/p-1/q}k^{-r-1}+m^{-1/p}k^{-r-1}$$

$$+m^{-1/p}k^{-r-1}+6\|f\|_{L_1(\Delta_i)}|\Delta_i|^{-1+1/p}k^{-r-1}$$

$$\leq C_4(p,q,r)\|f\|_{L_q(\Delta_i)}|\Delta_i|^{1/p-1/q}k^{-r-1}+2m^{-1/p}k^{-r-1},$$

$$C_4(p,q,r)=C_4(r)\lambda^{-6(r+1)}\quad\text{и}$$

$$\|p_i\|_{C(-\infty,\infty)}\leq\|f\|_{L_1(\Delta_i)}(m\|f\|^p_{L_q(\Delta_i)})^{1/(1-p/q)}k^{2(r+1)/\lambda}.$$

Этим лемма 3 доказана.

Обозначим

$$N(i,\mu)=2^\mu k+\sum_{\nu=0}^{\mu}2B2^\nu\ln^2(e+2^{\mu-\nu}(m2^{-\nu}\|f\|^p_{L_q[x_i,x_{i+2^\mu}]}(x_{i+2^\mu}-x_i)^{1-p/q})^{1/(1-p/q)}k^{3(r+1)/\lambda}$$

Лемма 4. *Пусть μ — целое и $0\leq\mu\leq s-1$. Пусть для любого отрезка. $\Delta=[x_i,x_{i+2^\mu}]$, $0\leq i\leq m-2^\mu$, существует рациональная функция $\tilde{p}$ порядка $\leq N(i,\mu)$, такая, что*

(43) $$\|f-\tilde{p}\|_{L_p(\Delta)}\leq\varphi(\mu)\|f\|_{L_q(\Delta)}|\Delta|^{1/p-1/q}k^{-r-1}+2.2^{\mu/p}m^{-1/p}k^{-r-1},$$

(44) $$\|\tilde{p}\|_{C(-\infty,\infty)}\leq\|f\|_{L_1(\Delta)}(m\|f\|^p_{L_q(\Delta)})^{1/(1-p/q)}k^{2(r+1)/0\lambda},$$

где $\varphi(\mu)\geq 0$. *Тогда для любого отрезка* $\Delta=[x_i, x_{i+2^{\mu+1}}]$, $0\leq i\leq m-2^{\mu+1}$, *существует рациональная функция* $\tilde{q}$ *порядка* $\leq N(i, \mu+1)$, *такая, что*

$$(45)\quad \|f-\tilde{q}\|_{L_p(\Delta)}\leq\left(\varphi(\mu)+\frac{6}{2^{\mu+1}}\right)\|f\|_{L_q(\Delta)}|\Delta|^{1/p-1/q}k^{-r-1}+2.2^{(\mu+1)/p}m^{-1/p}k^{-r-1},$$

$$(46)\quad \|\tilde{q}\|_{C(-\infty,\infty)}\leq\|f\|_{L_1(\Delta)}(m\|f\|^p_{L_q(\Delta)})^{1/(1-p/q)}k^{2(r+1)/\lambda}.$$

Доказательство. Пусть $0\leq i\leq m-2^{\mu+1}$. Рассмотрим отрезок $\Delta=[x_1, x_{i+2^{\mu+1}}]$. Если $\|f\|_{L_1(\Delta)}=0$, то положим $\tilde{q}=0$. Очевидно порядок $\tilde{q}$ не выше $N(i,\mu+1)$ и $\tilde{q}$ удовлетворяет (45), (46).

Рассмотрим случай, когда $\|f\|_{L_1(\Delta)}>0$. Обозначим $\Delta_0=[x_i, x_{i+2^\mu}]$, $\Delta_1=[x_{i+2^\mu}, x_{i+2^{\mu+1}}]$. Имеем $\Delta=\Delta_0\cup\Delta_1$. Из условия леммы 4, (43), (44) следует, что существуют рациональные функции $\tilde{p}_0$, $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_0\in R_{N(i,\mu)}$, $\tilde{p}_1\in R_{N(i+2^\mu,\mu)}$, такие, что

$$(47)\quad \|f-\tilde{p}_j\|_{L_p(\Delta_j)}\leq\varphi(\mu)\|f\|_{L_q(\Delta_j)}|\Delta_j|^{1/p-1/q}k^{-r-1}+2\,2^{\mu/p}m^{-1/p}k^{-r-1},$$

$$(48)\quad \begin{aligned}\|\tilde{p}_j\|_{C(-\infty,\infty)}&\leq\|f\|_{L_1(\Delta_j)}(m\|f\|^p_{L_q(\Delta_j)})^{1/(1-p/q)}k^{2(r+1)/\lambda}\\ &\leq\|f\|_{L_1(\Delta)}(m\|f\|^p_{L_q(\Delta)})^{1/(1-p/q)}k^{2(r+1)/\lambda},\quad j=0,1.\end{aligned}$$

Применяя лемму 1 при $g=f$, $z_0=x_i$, $z_1=x_{i+2^\mu}$, $z_2=x_{i+2^{\mu+1}}$, $p_0^*=\tilde{p}_0$, $p_1^*=\tilde{p}_1$, $\delta=2^{-\mu-1}\|f\|_{L_1(\Delta)}|\Delta|^{-1+1/p}k^{-r-1}$ и учитывая (47) и (48), получаем, что существует рациональная функция $\tilde{q}$ порядка

$$\begin{aligned}&\leq N(i,\mu)+N(i+2^\mu,\mu)+Bp\ln^2(e+\|f\|_{L_1(\Delta)}(m\|f\|^p_{L_q(\Delta)})^{1/(1-p/q)}k^{2(r+1)/\lambda}|\Delta|^{1/p}\delta^{-1})\\ &\leq N(i,\mu)+N(i+2^\mu,\mu)+Bp\ln^2(e+2^{\mu+1}(m\|f\|^p_{L_q(\Delta)}|\Delta|^{1-p/q})^{1/(1-p/q)}k^{3(r+1)/\lambda}),\end{aligned}$$

такая, что

$$\begin{aligned}\|f-\tilde{q}\|_{L_p(\Delta)}&\leq\{(\varphi(\mu)\|f\|_{L_q(\Delta_0)}|\Delta_0|^{1/p-1/q}k^{-r-1}+2.\,2^{\mu/p}m^{-1/p}k^{-r-1})^p\\ &\quad+(\varphi(\mu)\|f\|_{L_q(\Delta_1)}|\Delta_1|^{1/p-1/q}k^{-r-1}+2.2^{\mu/p}m^{-1/p}k^{-r-1})^p\}^{1/p}\\ &\quad+6.2^{-\mu-1}\|f\|_{L_1(\Delta)}|\Delta|^{-1+1/p}k^{-r-1}\\ &\leq\varphi(\mu)k^{-r-1}(\|f\|^p_{L_q(\Delta_0)}|\Delta_0|^{1-p/q}+\|f\|^p_{L_q(\Delta_1)}|\Delta_1|^{1-p/q})^{1/p}\\ &\quad+(2(2.2^{\mu/p}m^{-1/p}k^{-r-1})^p)^{1/p}+6\,.\,2^{-\mu-1}\|f\|_{L_1(\Delta)}|\Delta|^{-1+1/p}k^{-r-1}\\ &\leq(\varphi(\mu)+6.2^{-\mu-1})\|f\|_{L_q(\Delta)}|\Delta|^{1/p-1/q}k^{-r-1}+2.2^{(\mu+1)/p}m^{-1/p}k^{-r-1}\quad\text{и}\end{aligned}$$

$$\|\tilde{q}\|_{C(-\infty,\infty)}\leq\|f\|_{L_1(\Delta)}(m\|f\|^p_{L_q(\Delta)})^{1/(1-p/q)}k^{2(r+1)/\lambda},$$

т. е. $\tilde{q}$ удовлетворяет (45) и (46). В верхних оценках использовали неравенства типа $(\sum_l(x_l+y_l)^p)^{1/p}\leq(\sum_l x_l^p)^{1/p}+(\sum_l y_l^p)^{1/p}$,

$$\sum_l x_l^\alpha y_l^\beta\leq(\sum_l x_l)^\alpha(\sum_l y_l)^\beta,\quad x_l,\ y_l\geq 0,\quad \alpha+\beta=1\ \text{ и }\ \|f\|_{L_1(\Delta)}\leq\|f\|_{L_q(\Delta)}|\Delta|^{1-1/q}.$$

Осталось оценить порядок рациональной функции $\tilde{q}$. Поскольку функция $F(x)=-\ln^2(e+x^\gamma)$, $\gamma\geq 1$, выпукла на $[0, \infty)$, то

$$N(i,\ \mu)+N(i+2^\mu,\ \mu)+Bp\ln^2(e+2^{\mu+1}(m\,\|f\|^p_{L_q(\Delta)}\,|\Delta|^{1-p/q})^{1/(1-p/q)}k^{3(r+1)/\lambda})$$

$$=2^\mu k+\sum_{\nu=0}^{\mu}2Bp2^\nu\ln^2(e+2^{\mu-\nu}(m2^{-\nu}\,\|f\|^p_{L_q(\Delta_0)}\,|\Delta_0|^{1-p/q})^{1/(1-p/q)}k^{3(r+1)/\lambda})$$

$$+2^\mu k+\sum_{\nu=0}^{\mu}2Bp2^\nu\ln^2(e+2^{\mu-\nu}(m2^{-\nu}\|f\|^p_{L_q(\Delta_1)}\,|\Delta_1|^{1-p/q})^{1/(1-p/q)}k^{3(r+1)/\lambda})$$

$$+2Bp\ln^2(e+2^{\mu+1}(m\,\|f\|^p_{L_q(\Delta)}\,|\Delta|^{1-p/q}))^{1/(1-p/q)}(k^{3(r+1)/\lambda})$$

$$\leq 2^{\mu+1}k+\sum_{\nu=0}^{\mu}2Bp2^{\nu+1}\ln^2(e+2^{\mu+1-(\nu+1)}(m2^{-\nu-1}(\|f\|^p_{L_q(\Delta_0)}\,|\Delta_0|^{1-p/q}$$

$$+\|f\|^p_{L_q(\Delta_1)}\,|\Delta_1|^{1-p/q}))^{1/(1-p/q)}k^{3(r+1)/\lambda})$$

$$+2Bp\ln^2(e+2^{\mu+1}(m\,\|f\|^p_{L_q(\Delta)}\,|\Delta|^{1-p/q})^{1/(1-p/q)}k^{3(r+1)/\lambda})$$

$$=2^{\mu+1}k+\sum_{j=0}^{\mu+1}2Bp2^j\ln^2(e+2^{\mu+1-j}(m2^{-j}\,\|f\|^p_{L_q(\Delta)}\,|\Delta|^{1-p/q})^{1/(1-p/q)}k^{3(r+1)/\lambda})$$

$$=N(i,\ \mu+1),$$

т. е. рациональная функция $\tilde{q}$ имеет порядок $\leq N(i,\ \mu+1)$. При получении верхних оценок сделали замену $j=\nu+1$ и использовали неравенство вышеуказанного типа. Лемма 4 доказана.

Заканчиваем доказательство теоремы 4. Применяя последовательно s раз $(m=2^s)$ лемму 4, начиная с леммы 3, получаем, что существует рациональная функция $\tilde{q}$ порядка $\leq N(0,\ s)$, такая, что

$$\|f-\tilde{q}_{L_p[0,\ 1]}\leq (C_4(r)\lambda^{-6(r+1)}+\sum_{\nu=1}^{s}6.2^{-\nu})\,\|f\|_{L_q[0,\ 1]}\,k^{-r-1}+2.2^{s/p}m^{1/p}k^{-r-1}$$

$$\leq (C_4(r)+8)\lambda^{-6(r+1)}k^{-r-1}\leq (C_4(r)+8)\lambda^{-6(r+1)}(n/4m)^{-r-1}\leq C_5(r)\lambda^{-6(r+1)}m^{r+1}n^{-r-1},$$

т. е.

$$\|f-\tilde{q}\|_{L_q[0,\ 1]}\leq C_5(r)\lambda^{-6(r+1)}m^{r+1}n^{-r-1}. \tag{49}$$

Осталось оценить порядок рациональной функции $\tilde{q}$. Так как $\|f\|_{L_q[0,\ 1]}=1$ и $m=2^s$, то

$$N(0,\ s)=2^sk+\sum_{\nu=0}^{s}2Bp2\ln^2(e+2^{s-\nu}(m2^{-\nu})^{1/(1-p/q)}k^{3(r+1)/\lambda})$$

$$\leq 2^sk+\sum_{\nu=0}^{s}2Bp2^\nu\ln^2(e+2^{2(s-\nu)/\lambda}k^{3(r+1)/\lambda})$$

$$\leq 2^sk+18B(r+1)^2\lambda^{-3}\sum_{\nu=0}^{s}2^\nu\ln^2(2^{s+1-\nu}k)$$

$$\leq 2^s k+18B(r+1)^2\lambda^{-3}\{(\ln 2)^2 \sum_{\nu=0}^{s} 2^\nu(s+1+2/\ln 2-\nu)^2$$

$$+2\ln k \ln 2 \sum_{\nu=0}^{s} 2^\nu(s+1+1/\ln 2-\nu)+(\ln k)^2 \sum_{\nu=0}^{s} 2^\nu\}.$$

Поскольку функции $2^x(s+1+2/\ln 2-x)^2$ и $2^x(s+1+1/\ln 2-x)$ монотонно возрастают на $[0, s+1]$, то

$$\sum_{\nu=0}^{s} 2^\nu(s+1+2/\ln 2-\nu)^2 \leq \int_0^{s+1} 2^x(s+1+2/\ln 2-x)^2 dx < 2^7 2^s,$$

$$\sum_{\nu=0}^{s} 2^\nu(s+1+1/\ln 2-\nu) \leq \int_0^{s+1} 2^x(s+1+1/\ln 2-x)dx < 2^4 2^s.$$

Следовательно,

$$N(0, s) \leq 2^s k+18B(r+1)^2\lambda^{-3}(2^7 2^s+2^5 2^s \ln k+2\, 2^s \ln^2 k)$$

$$\leq mk+2^{12}B(r+1)^2\lambda^{-3}m \ln^2 k.$$

Так как $n>A=2^{24}B^2(r+1)^4\lambda^{-6}m$ и $k=[n/2m]$, то $k>2^{23}$ и, следовательно, $\ln^2 k<\sqrt{k}/2$. Тогда имеем $N(0, s)\leq n/2+2^{11}B(r+1)^2\lambda^{-3}m\sqrt{n/m}\leq n$, т. е. $\tilde{q} \in R_n$. Отсюда и (49) получаем, что

$$R_n(f)_{L_p} \leq C_5(r)\lambda^{-6(r+1)}m^{r+1}n^{-r-1} \quad \text{при} \quad n>A. \tag{50}$$

Из (33) и (50) следует справедливость теоремы 4.

Доказательство теоремы 1. Пусть $1\leq p<q\leq\infty$, $k\geq 0$, $\alpha>0$ и $f \in L_q[a, b]$. Для любого $i\geq 0$ существует функция $\varphi_i \in S(k, 2^i, [a, b])$, такая, что

$$\| f-\varphi_i\|_{L_q}=E^k_{2^i}(f)_{L_q}. \tag{51}$$

Положим $r=[\alpha]+1$. Пусть s — произвольное целое неотрицательное число. Для любого i, $1\leq i\leq s$, выбираем натуральное число N_i так, чтобы

$$2^{(s\alpha+i(r+1-\alpha))/(r+1)} \leq N_i \leq 2.2^{(s\alpha+i(r+1-\alpha))/(r+1)}. \tag{52}$$

Положим $N_0=k$ и $N=\sum_{i=0}^{s} N_i$. Очевидно имеем

$$R_N(f)_{L_p} \leq \| f-\varphi_s\|_{L_p}+R_{N_s}(\varphi_s-\varphi_{s-1})_{L_p}+R_{N_{s-1}}(\varphi_{s-1}-\varphi_{s-2})_{L_p} \tag{53}$$
$$+\cdots+R_{N_1}(\varphi_{2^1}-\varphi_{2^0})_{L_p}+R_{N_0}(\varphi_{2^0})_{L_p}.$$

Рассмотрим функцию $\psi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}$, $1\leq i\leq s$. Очевидно $\psi_i \in S(k, 3.2^{i-1}, [a, b)$ и существует разбиение интервала $[a, b]$ на небольше, чем $m_i=3.2^{i-1}(1+1+2+\cdots+k)\leq 3(k+1)^2 2^{i-1}$ интервалов, на каждом из которых функции ψ_i, ψ_i', $\dots$, $\psi_i^{(r)}$ монотонны. Тогда, согласно теореме 4, имеет место

$$R_{N_i}(\varphi_i-\varphi_{i-1})_{L_p} \leq C_2(p, q, r)\| \varphi_i-\varphi_{i-1}\|_{L_q}(b-a)^{1/p-1/q}m_i^{r+1}N_i^{-r-1}, \tag{54}$$

где $C_2(p, q, r)=C_2(r)(1/p-1/q)^{-6(r+1)}$. Из (51), (52) и (54) следует, что

$$R_{N_i}(\varphi_i-\varphi_{i-1})_{L_p} \leq C_3(p, q, k, r)(b-a)^{1/p-1/q}E^k_{2^{i-1}}(f)_{L_q}2^{(i-1)\alpha}2^{-s\alpha}, \tag{55}$$

где $C_3(p, q, k, r) = C_3(r)(k+1)^{2(r+1)}(1/p-1/q)^{-6(r+1)}$, $1 \leq i \leq s$. Очевидно $R_{N_0}(\varphi_{2^0})_{L_q} = 0$. Тогда, объединяя (53) и (55), получаем

(56) $$R_N(f)_{L_p} \leq C_3(p, q, k, r)(b-a)^{1/p-1/q} 2^{-s\alpha} \sum_{i=0}^{s} 2^{i\alpha} E^k_{2^i}(f)_{L_q},$$

где $N = \Sigma_{i=0}^s N_i \leq k + \Sigma_{i=1}^s 2.2^{(s.\alpha+i(r+1-\alpha))/(r+1)} \leq 8(r+1)(k+1)2^s$, $s \geq 0$.

Пусть $n \geq k$. Если $n \leq A = 8(r+1)(k+1)$, то очевидно

$$R_n(f)_{L_p} \leq E^k_1(f)_{L_p} \leq (b-a)^{1/p-1/q} E^k_1(f)_{L_q}$$
$$\leq (8(r+1)(k+1))^\alpha (b-a)^{1/p-1/q} n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha-1} E^k_\nu(f)_{L_q},$$

т. е.

(57) $$R_n(f)_{L_p} \leq C(k, \alpha)(b-a)^{1/p-1/q} n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha-1} E^k_\nu(f)_{L_q} \quad \text{при} \quad 1 \leq n \leq A.$$

Пусть $n > A$. Пусть s — натуральное и такое, что $A2^s \leq n < A\, 2^{s+1}$. Тогда из (56) следует, что

$$R_n(f)_{L_p} = R_N(f)_{L_p} \leq 2^\alpha C_3(p, q, k, \alpha)(b-a)^{1/p-1/q} 2^{-s\alpha}\Big(E^k_1(f)_{L_q} + \sum_{i=1}^{s} 2^{(i-1)\alpha} E^k_{2^i}(f)_{L_q}\Big)$$

$$\leq 2^\alpha (2A)^\alpha C_3(p, q, k, r)(b-a)^{1/p-1/q} n^{-\alpha}\Big(E^k_1(f)_{L_q} + \sum_{i=1}^{s} 2^{(i-1)(\alpha-1)} \sum_{\nu=2^{i-1}+1}^{2^i} E^k_\nu(f)_{L_q}\Big).$$

Следовательно,

(58) $$R_n(f)_{L_p} \leq C_5(p, q, k, \alpha)(b-a)^{1/p-1/q} n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha-1} E^k_\nu(f)_{L_q} \quad \text{при} \quad n > A,$$

где $C_5(p, q, k, \alpha) = C_5(k, \alpha)(1/p-1/q)^{-6(\alpha+2)}$.

Из (57) и (58) следует справедливость теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 не будем проводить. Теорема 2 доказывается методом доказательства теоремы 1, используя следующее утверждение:

Теорема 5. *Пусть* $1 \leq p < q \leq \infty$, $f \in L_q[a, b]$ *и существуют точки* $\{x_i\}_{i=0}^m$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, *такие, что* $f, f', \ldots, f^{(r)}$ *монотонны на любом интервале* (x_{i-1}, x_i), $1 \leq i \leq m$, $r \geq 0$. *Тогда*

$$E^r_n(f)_{L_p} \leq C(p, q, r)\,\|f\|_{L_q}(b-a)^{1/p-1/q} m^{r+1} n^{-r-1} \quad \text{при} \quad n \geq 1,$$

где $C(p, q, r) = C(r)(1/p-1/q)^{-r-2}$.

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 4.

Замечание. Методом доказательства теоремы 1 этой статьи с непринципиальными изменениями доказываются и остальные утверждения, анонсированные в [1].

Доказательство следствия 1. Пусть $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$, $k \geq 1$, $\varepsilon > 0$, и $f \in S_k(\lambda, p+\varepsilon)$, т. е. $f \in L_{p+\varepsilon}[0, 1]$ и $E^{k-1}_n(f)_{L_{p+\varepsilon}} = O(n^{-\lambda})$. Пусть $\alpha > \lambda$. Тогда, согласно теореме 1,

$$R_n(f)_{L_p} = O\Big(n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha-1} E^{k-1}_\nu(f)_{L_{p+\varepsilon}}\Big) = O\Big(n^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha-1-\lambda}\Big) = O(n^{-\lambda})$$

и, следовательно, $S_k(\lambda, p+\varepsilon)\subset R(\lambda, p)$.
Аналогично, изпользуя теорему 2, получаем $R(\lambda, p)\subset S_r(\lambda, p-\varepsilon)$, $r>\lambda$. Следствие 1 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. П. Петрушев. Рациональные и кусочно-полиномиальные аппроксимации. *Доклады БАН*, **34**, 1981, 7—10.
2. Ю. А. Брудный. Кусочно-полиномиальная аппроксимация и локальные приближения. *Доклады АН СССР*, **201**, 1971, 16—19.
3. V. A. Popov. On the connection between rational and spline approximation. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **27**, 1974, 623—626.
4. Ю. А. Брудный. Рациональные аппроксимации и теоремы вложения. *Доклады АН СССР*, **247**, 1979, 269—272.
5. А. А. Гончар. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями. *Мат. сб.*, **73**, 1967, 630—638.
6. П. П. Петрушев. Равномерные рациональные аппроксимации функций класса V_r. *Мат. сб.*, 108, 1979, 418—432.
7. V. A. Popov. Uniform rational approximation of the class V_r and its applications. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **29**, 1977, 119—129.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 11. 1981

МАТЕМАТИКА