PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

О БИКОМПАКТНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ПЕРИФЕРИЧЕСКИ БИКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ С НАРОСТАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

ГЕОРГИ Д. ДИМОВ

В статье на основании результатов Скляренко [6], предлагается новый метод, с помощью которого удается охарактеризовать различные свойства наростов периферически бикомпактных пространств в терминах самих пространств. Точнее, рассматриваются следующие свойства наростов: π-вес, мощность, дискретность (локальная бикомпактность) при заданной мощности, отсутствие точек локальной бикомпактности.

Введение. В п. 1 рассматривается один метод, с помощью которого можно охарактеризовать различные свойства наростов периферически бикомпактных пространств внутренним образом. В п. 2 характеризуются те пространства X, которые имеют бикомпактное расширение cX с нульмерно расположенным наростом (т. е. cX — π-расширение пространства X) с наперед заданным π-весом. В п. 3 приводятся некоторые оценки о мощности наростов π-расширений периферически бикомпактных пространств, в частности даются достаточные условия для того, чтобы нарост Фрейденталевского расширения пространства X был счетным. Пункт 4 посвящен изучению пространств, для которых все наросты (или существуют наросты) являются пространствами без точек локальной бикомпактности. Наконец, в п. 5 характеризуются те периферически бикомпактные пространства, которые имеют π-расширение с дискретным наростом с наперед заданной мощностью. Отметим, что доказанные в п. 5 теоремы были опубликованы в [5], но без доказательства. Отметим также, что и теорема 3 из [4] была получена при помощи метода, который рассматриваем, но опять из-за нехватки места та часть доказательства, которая опиралась на него, не доказывалась. Лемма 1.12 настоящей работы заполняет этот пробел.

1. Леммы и определения. Все рассматриваемые в этой работе пространства будут предполагаться вполне регулярными, а все бикомпактные расширения — хаусдорфовыми.

Как обычно, через $|X|$ будем обозначать мощность множества X.

Если A — подмножество пространства X, то через $\mathrm{cl}_X A$ будем обозначать замыкание множества A в пространстве X.

Пусть cX — бикомпактное расширение пространства X. Будем пользоваться следующими обозначениями: если A — подмножество пространства X, то $\mathrm{Ex}_c(A)=cX\setminus \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)$ и $A^c=(\mathrm{Ex}_c A)\cap(cX\setminus X)$. Как известно, если A — открытое подмножество пространства X, то любое открытое в cX множество B, такое, что $B\cap X=A$ содержится в $\mathrm{Ex}_c A$.

Напомним [6], что бикомпактное расширение cX пространства X называется совершенным относительно открытого в X множества $A\subset X$, если Fr_{cX}

$(\mathrm{Ex}_c(A))=\mathrm{cl}_{cX}(\mathrm{Fr}_X A)$, и cX называется совершенным расширением, если оно совершенно относительно любого открытого в X множества A.

1.1. Лемма. *Если cX — бикомпактное расширение пространства X, а A — подмножество пространства X с бикомпактной границей, то $A^c=(\mathrm{Int}_X(\mathrm{cl}_X A))^c$; в частности справедливо следующее равенство: $\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\setminus X=\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus \mathrm{cl}_X A)\setminus X$.*

Доказательство. Для любого $B\subset X$ обозначим $D(B)=X^c\setminus B^c$. Тогда $D(B)=\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus B)\setminus X$ Следовательно, $A^c=(\mathrm{Int}_X(\mathrm{cl}_X A))^c$ тогда и только тогда, когда $D(A)=D(\mathrm{Int}_X(\mathrm{cl}_X A))$. Но $\mathrm{Int}_X(\mathrm{cl}_X A)=X\setminus \mathrm{cl}_X(X\setminus \mathrm{cl}_X A)$ и, следовательно, $D(\mathrm{Int}_X(\mathrm{cl}_X A))=\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus \mathrm{cl}_X A)\setminus X$, а $D(A)=\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\setminus X$, т. е. нам нужно доказать, что $\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus \mathrm{cl}_X A)\setminus X=\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\setminus X$. Очевидно, $\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\setminus X\supset \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus \mathrm{cl}_X A)\setminus X$. Пусть теперь $x\in \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\setminus X$. Допустим, что $x\notin \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus \mathrm{cl}_X A)\setminus X$. Тогда существует открытая в cX окрестность Vx точки x, такая, что $Vx\cap(X\setminus \mathrm{cl}_X A)=\emptyset$. Но $X\setminus \mathrm{cl}_X A=(X\setminus A)\cap(X\setminus \mathrm{Fr}_X A)$. Следовательно, $Vx\cap(X\setminus A)\cap(X\setminus \mathrm{Fr}_X A)=\emptyset$. Но $Vx\cap(X\setminus A)\neq\emptyset$. Значит, $Vx\cap(X\setminus A)\subset cX\setminus(X\setminus \mathrm{Fr}_X A)=X^c\cup \mathrm{Fr}_X A$, т. е. $Vx\cap(X\setminus A)\subset \mathrm{Fr}_X A$. Пусть $Wx=Vx\setminus \mathrm{Fr}_X A$. Тогда Wx — открытая в cX окрестность точки x, так как $\mathrm{Fr}_X A$ — бикомпакт и $x\in X^c$. Следовательно, $\emptyset\neq Wx\cap(X\setminus A)\subset \mathrm{Fr}_X A$ и $Wx\cap(X\setminus A)\subset X\setminus \mathrm{Fr}_X A$. Получили противоречие. Лемма 1.1 доказана.

1.2. Лемма. *Если cX — бикомпактное расширение пространства X; A и B — открытые подмножества пространства X; cX — совершенно относительно множества B и $\mathrm{Fr}_X B$ — бикомпакт, то $A^c\supset B^c$ тогда и только тогда, когда подпространство $\mathrm{cl}_X B\setminus A$ бикомпактно.*

Доказательство. А. Пусть $A_c\supset B_c$. Покажем, что тогда подпространство $\mathrm{cl}_X B\setminus A$ бикомпактно.

Очевидно $A^c\supset B^c$ тогда и только тогда, когда $D(A)=X^c\setminus A^c\subset X^c\setminus B^c=D(B)$, т. е. когда $\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\cap X^c\subset X^c\cap \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus B)$.

Покажем, что $\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\cap \mathrm{cl}_{cX}\mathrm{Ex}_c(B)\subset X$, т. е. что $E=X^c\cap \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\cap \mathrm{cl}_{cX}\mathrm{Ex}_c(B)=\emptyset$. Действительно, $E=(X^c\cap \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A))\cap \mathrm{cl}_{cX}\mathrm{Ex}_c(B)\subset(X^c\cap \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus B))\cap \mathrm{cl}_{cX}(cX\setminus \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus B))=X^c\cap \mathrm{Fr}_{cX}\mathrm{Ex}_c(B)$, но так как $\mathrm{Fr}_{cX}(\mathrm{Ex}_c(B))=\mathrm{Fr}_X B$, то $E=X^c\cap \mathrm{Fr}_X B\subset X^c\cap X=\emptyset$. Следовательно, множество $\Phi=\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\cap \mathrm{cl}_{cX}\mathrm{Ex}_c(B)$ является бикомпактным подмножеством пространства X. Кроме того, $\Phi=\Phi\cap X=X\cap \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\cap \mathrm{cl}_{cX}\mathrm{Ex}_c(B)=(X\setminus A)\cap \mathrm{cl}_{cX}(X\cap \mathrm{Ex}_c(B))=(X\setminus A)\cap \mathrm{cl}_X B=\mathrm{cl}_X B\setminus A$, т. е. множество $\mathrm{cl}_X B\setminus A$ бикомпактно.

Б. Пусть подпространство $\mathrm{cl}_X B\setminus A$ бикомпактно. Покажем, что тогда $A^c\supset B^c$, т. е. $D(A)\subset D(B)$, т. е. $D(A)\setminus D(B)=\emptyset$. Итак, нам нужно доказать, что $(X^c\cap \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A))\setminus(X^c\cap \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus B))=\emptyset$, т. е. что $(X^c\cap \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A))\cap(cX\setminus \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus B))=\emptyset$, или, что то же самое, что $X^c\cap \mathrm{Ex}_c(B)\cap \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)=\emptyset$. Для этого достаточно показать, что $\mathrm{Ex}_c(B)\cap \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\subset X$. Докажем даже, что $\Phi=\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\cap \mathrm{cl}_{cX}\mathrm{Ex}_c(B)\subset X$.

Очевидно, $\Phi=\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\cap \mathrm{cl}_{cX}(X\cap \mathrm{Ex}_c(B))=\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\cap \mathrm{cl}_{cX}B$. Допустим, что существует точка x, такая, что $x\in\Phi\cap X^c$. Если для любой открытой в cX окрестности Vx точки x обозначим: $W_Vx=Vx\setminus(\mathrm{cl}_X B\setminus A)$, то W_Vx — тоже открытая в cX окрестность Vx точки x, а тогда, так как $x\in \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)$, $\emptyset\neq W_Vx\cap(X\setminus A)=(Vx\setminus(\mathrm{cl}_X B\setminus A))\cap(X\setminus A)=((Vx\setminus \mathrm{cl}_X B)\cup(Vx\cap A))\cap(X\setminus A)=Vx\cap(cX\setminus \mathrm{cl}_X B)\cap(X\setminus A)=Vx\cap(X\setminus \mathrm{cl}_X B)\cap(X\setminus A)$. Следовательно, для любой открытой в cX окрестности V_x точки x получаем: $Vx\cap(X\setminus \mathrm{cl}_X B)\neq\emptyset$, т. е. $x\in \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus \mathrm{cl}_X B)$, а тогда $x\in X^c\cap\Phi\cap \mathrm{cl}_{cX}(X\setminus \mathrm{cl}_X B)=\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus A)\cap \mathrm{cl}_{cX}B\cap(\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus \mathrm{cl}_X B)\setminus X)$. Но так как граница множества B бикомпактна, то из леммы 1.1 следует, что $\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus \mathrm{cl}_X B)\setminus X=\mathrm{cl}_{cX}(X\setminus B)\setminus X$. Получаем, что $x \in \mathrm{cl}_{cX}(X \setminus A) \cap \mathrm{cl}_{cX}B \cap \mathrm{cl}_{cX}(X \setminus B) \cap X^c$, а тогда $x \in \mathrm{cl}_{cX}B \cap \mathrm{cl}_{cX}(X \setminus B) \cap X^c = \mathrm{cl}_{cX}\mathrm{Ex}_c(B) \cap \mathrm{cl}_{cX}(X \setminus B) \cap X^c = X^c \cap \mathrm{cl}_{cX}(X \setminus B) \cap \mathrm{cl}_{cX}(cX \setminus \mathrm{cl}_{cX}(X \setminus B)) = X^c \cap \mathrm{Fr}_{cX}\mathrm{Ex}_c(B) = X^c \cap \mathrm{Fr}_X B \subset X^c \cap X = \varnothing$. Получили противоречие. Следовательно, $\Phi \subset X$. Лемма доказана.

1.3. Из леммы 1.2 получаем следующее важное для дальнейшего следствие:

Следствие. *Если cX — бикомпактное расширение пространства X, совершенное относительно открытых в X множеств A и B с бикомпактными границами, то $A^c = B^c$ тогда и только тогда, когда множество $(\mathrm{cl}_X A \setminus B) \cup (\mathrm{cl}_X B \setminus A)$ бикомпактно.*

1.4. Замечание. Отметим без доказательства следующие простые факты: Пусть cX — бикомпактное расширение пространства X, а A и B — подмножества пространства X. Тогда:

а) $\mathrm{Ex}_c(A) \cap \mathrm{Ex}_c(B) = \mathrm{Ex}_c(A \cap B)$.

б) Если $\mathrm{cl}_X A$ — бикомпактное множество, то $A^c = \varnothing$.

в) Если cX совершенно относительно открытого в X множества E с бикомпактной границей и $E^c = \varnothing$, то $\mathrm{cl}_X E$ — бикомпакт.

г) Если $X \setminus A$ — бикомпактное множество, то $A^c = cX \setminus X = X^c$.

1.5. Определение. *π-семейством будем называть любое семейство открытых подмножеств пространства X с бикомпактными границами. Как известно, пространство X называется периферически бикомпактным пространством, если в нем имеется база, являющаяся π-семейством.*

1.6. Определение. *Пусть $\mathscr{B}$ — π-семейство в пространстве X. В множестве $\mathscr{B}$ определим следующее бинарное отношение ρ: если $A \in \mathscr{B}$, $B \in \mathscr{B}$, то $A \rho B$ тогда и только тогда, когда множество $\mathrm{cl}_X(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ бикомпактно.*

1.7. Замечание. Определенное в п. 1.6 бинарное отношение ρ в π-семействе $\mathscr{B}$ является отношением эквивалентности.

Будем обозначать через $\mathscr{B}/\rho$ множество всех классов ρ-эквивалентности (ρ-классов) в множестве $\mathscr{B}$, а если $A \in \mathscr{B}$, то через $[A]$ будем обозначать тот ρ-класс, который содержит элемент A множества $\mathscr{B}$.

Отметим также, что $\mathrm{cl}_X(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (\mathrm{cl}_X A \setminus B) \cup (\mathrm{cl}_X B \setminus A)$.

1.8. Определения. Напомним некоторые определения и конструкции, необходимые для дальнейшего, из работы Скляренко [6].

База $\mathscr{B}$ пространства X называется π-бикомпактной базой, если $\mathscr{B}$ — π-семейство, замкнутое относительно взятия конечных объединений и пересечений его элементов, и такое, что, если $A \in \mathscr{B}$, то и $(X \setminus \mathrm{cl}_X A) \in \mathscr{B}$. Очевидно, пространство X периферически бикомпактно тогда и только тогда, когда оно имеет π-бикомпактную базу.

Пусть $\mathscr{B}$ — π-бикомпактная база пространства X, а A и B — произвольные подмножества множества X. Определим $A \bar{\delta} B$ тогда и только тогда, когда существует элемент E базы $\mathscr{B}$, такой, что $\mathrm{cl}A \subset E$ и $\mathrm{cl}B \subset X \setminus \mathrm{cl}E$. Тогда отношение δ (т. е. отрицание отношения $\bar{\delta}$) будет отношением близости на множестве X, и эта близость будет совместимой с топологией пространства X. Бикомпактное расширение $c_{\mathscr{B}}X$ Смирнова [7], соответствующее близости δ, называется π-расширением пространства X, ассоциированным с π-бикомпактной базой $\mathscr{B}$, или просто π-расширением.

Напомним еще, что подмножество A пространства X называется нульмерно расположенным в X, если для любой точки $x\in X$ существует открытая база $\mathscr{B}_x$ точки x в X, такая, что, если $B\in\mathscr{B}_x$, то $\mathrm{Fr}_X B\subset X\setminus A$.

Нам будут нужны также следующие результаты из [6]:

1.9. Лемма (Е. Г. Скляренко). *Пусть cX — π-расширение пространства X, ассоциированное с π-бикомпактной базой $\mathscr{B}$. Тогда cX совершенно относительно всех элементов базы $\mathscr{B}$, а семейство $\mathrm{Ex}_c\mathscr{B}=\{\mathrm{Ex}_c B: B\in\mathscr{B}\}$ является базой бикомпакта cX.*

1.10. Теорема (Е. Г. Скляренко). *π-расширения периферически бикомпактного пространства X — это те и только те бикомпактные расширения пространства X, у которых нарост не только нульмерен* (в *смысле* ind), *но и нульмерно расположен.*

1.11. Обозначения. Обозначим через $\mathscr{L}(X)$ множество всех точек пространства X, в которых оно локально бикомпактно, и пусть $R(X)=X\setminus\mathscr{L}(X)$.

Пусть $\mathscr{B}$ — семейство подмножеств пространства X. Введем следующие обозначения: $\mathscr{B}^0=\{B\in\mathscr{B}: \mathrm{cl}_X B$ не бикомпактно$\}$ и $\mathscr{B}'=\{B\in\mathscr{B}^0: \mathrm{cl}_X B\subset\mathscr{L}(X)\}$.

1.12. Лемма. *Пусть cX — π-расширение периферически бикомпактного пространства X, ассоциированное с π-бикомпактной базой $\mathscr{B}$ пространства X. Тогда $w(cX\setminus X)\leq|\mathscr{B}^0/\rho|\leq|\mathscr{B}/\rho|$.*

Доказательство. Из леммы 1.9 следует, что семейство $\mathrm{Ex}_c\mathscr{B}=\{\mathrm{Ex}_c B: B\in\mathscr{B}\}$ является базой бикомпакта cX и что расширение cX совершенно относительно всех элементов базы $\mathscr{B}$. Тогда, очевидно, семейство $\sigma=\{B^c\neq\emptyset: B\in\mathscr{B}\}$ является базой пространства $cX\setminus X$. Так как база $\mathscr{B}$ есть π-семейство, то из следствия 1.3 получаем, что если $A\in\mathscr{B}$ и $B\in\mathscr{B}$, то $A^c=B^c$ тогда и только тогда, когда $A\rho B$, т. е. когда $[A]=[B]$. Следовательно, $|\sigma|\leq|\mathscr{B}/\rho|$. Но на самом деле $|\sigma|\leq|\mathscr{B}^0/\rho|$, так как если $A\in\mathscr{B}$, то из замечания 1.4 (б, в) следует, что $A^c\neq\emptyset$ тогда и только тогда, когда $A\in\mathscr{B}^0$. Следовательно, $w(cX\setminus X)\leq|\sigma|\leq|\mathscr{B}^0/\rho|\leq|\mathscr{B}/\rho|$. Лемма доказана.

1.13. Определение. *Пусть $\mathscr{B}$ — π-семейство в пространстве X. В множестве $\mathscr{B}/\rho$ зададим новое бинарное отношение, а именно, если $[A]\in\mathscr{B}/\rho$ и $[B]\in\mathscr{B}/\rho$, то определяем: $[A]\leq[B]$ тогда и только тогда, когда множество $\mathrm{cl}_X B\setminus A$ бикомпактно.*

1.14. Замечание и обозначение. Отношение „$\leq$“, определенное в 1.13 в множестве $\mathscr{B}/\rho$, является корректно определенным рефлексивным, антисимметричным и транзитивным отношением, т. е. отношение „$\leq$“ упорядочивает множество $\mathscr{B}/\rho$.

Множество всех максимальных направленных подмножеств упорядоченного множества $(\mathscr{B}/\rho, \leq)$ будем обозначать через $\mathscr{B}_\rho$.

Следующие две леммы стандартны и поэтому мы только сформулируем их:

1.15. Лемма. *Если $(P, \leq)$ — упорядоченное множество, то любое направленное подмножество A множества P содержится в максимальном направленном подмножестве $\tilde{A}$ множества P.*

1.16. Лемма. *Пусть $(P, \leq)$ — упорядоченное множество и C — максимальное направленное подмножество множества P. Тогда, если $x\in P$ и существует элемент y множества C, такой, что $x\leq y$, то $x\in C$.*

1.17. Лемма. *Пусть $\mathscr{B}$ — π-семейство в пространстве X, замкнутое относительно взятия конечных пересечений его элементов. Тогда для любых двух элементов x и y упорядоченного множества $(\mathscr{B}/\rho, \leq)$ существует наименьшая верхняя грань $x\vee y=\sup\{x, y\}$ в $(\mathscr{B}/\rho, \leq)$.*

Доказательство. Пусть $x=[A]$, $y=[B]$, где A и B — элементы семейства $\mathscr{B}$. Тогда $C=A\cap B$ тоже является элементом семейства $\mathscr{B}$, и множество $\mathrm{cl}C\setminus A$ бикомпактно (очевидно, $\mathrm{cl}C\setminus A\subset \mathrm{Fr}C$). Следовательно, $[A]\leq[C]$. Аналогично получаем, что $[B]\leq[C]$. Пусть теперь $\Phi\in\mathscr{B}$ и $[\Phi]\geq[A]$, $[\Phi]\geq[B]$. Тогда $[\Phi]\geq[A\cap B]=[C]$, так как множество $\mathrm{cl}\Phi\setminus(A\cap B)=(\mathrm{cl}\Phi\setminus A)\cup(\mathrm{cl}\Phi\setminus B)$ бикомпактно. Следовательно, $[C]=[A\cap B]$ является наименьшей верхней гранью элементов $[A]$, $[B]$. Лемма доказана.

1.18. Следствие. Пусть $\mathscr{B}$ — π-семейство в пространстве X, замкнутое относительно взятия конечных пересечений его элементов. Тогда любое двухэлементное подмножество $\{x, y\}$ упорядоченного множества $(\mathscr{B}^0/\rho, \leq)$ или же $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$ имеет наименьшую верхнюю грань в $(\mathscr{B}^0/\rho, \leq)$, соответственно в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$, тогда и только тогда, когда оно имеет верхнюю грань в $(\mathscr{B}^0/\rho, \leq)$, соответственно в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$.

Доказательство. Очевидно, что если A, B — элементы семейства $\mathscr{B}'$ и $A\cap B\in\mathscr{B}^0$, то $A\cap B\in\mathscr{B}'$. Пусть $x=[A]$, $y=[B]$ и пусть $z=[C]\in\mathscr{B}^0/\rho$ является верхней гранью множества $\{x, y\}$ в $(\mathscr{B}^0/\rho, \leq)$. Допустим, что $A\cap B\notin\mathscr{B}^0$; тогда $\mathrm{cl}(A\cap B)$ — бикомпактное множество и так как $\mathrm{cl}C\subset(\mathrm{cl}C\setminus A)\cup(\mathrm{cl}C\setminus B)\cup \mathrm{cl}(A\cap B)$, то $\mathrm{cl}C$ — бикомпакт. Но это невозможно, так как $C\in\mathscr{B}^0$. Следовательно, $A\cap B\in\mathscr{B}^0$. Тогда из леммы 1.17 следует, что $\sup\{x, y\}=[A\cap B]$. Следствие доказано.

1.19. Определения. *Пусть $(P, \leq)$ — упорядоченное множество. Напомним, что нижележащим конусом подмножества A множества P называется множество* $A^\triangledown=\{x\in P\colon x\leq a$ для любого $a\in A\}$. *Если $A=\{a\}$ то вместо $\{a\}^\triangledown$ будем писать просто $a^\triangledown$. Подмножество I множества P называется идеалом, если для любого $x\in I$ имеет место включение $x^\triangledown\subset I$ и для любых двух элементов x и y множества I существует наименьшая верхняя грань $z=x\vee y$ в $(P, \leq)$ и $z\in I$. Идеал I называется главным идеалом, если существует $x\in I$, такой, что $x^\triangledown=I$.*

Пусть теперь $\mathscr{V}$ — семейство подмножеств множества X, замкнутое относительно непустых конечных пересечений своих элементов. Тогда, как известно, подсемейство $\mathscr{F}\subset\mathscr{V}$ называется $\mathscr{V}$-фильтром, если $\varnothing\notin\mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ замкнуто относительно конечных пересечений своих элементов и если $A\in\mathscr{V}$ и существует $B\in\mathscr{F}$, такое, что $B\subset A$, то $A\in\mathscr{F}$. Напомним также, что любой $\mathscr{V}$-фильтр содержится в $\mathscr{V}$-ультрафильтре и что $\mathscr{V}$-фильтр $\mathscr{F}$ является $\mathscr{V}$-ультрафильтром тогда и только тогда, когда любой элемент Φ семейства $\mathscr{V}$, для которого $\Phi\cap F\neq\varnothing$ для произвольного $F\in\mathscr{F}$, содержится в $\mathscr{F}$.

1.20. Лемма. *Если $\mathscr{B}$ — π-семейство в пространстве X, замкнутое относительно конечных пересечений своих элементов, то $I\in\mathscr{B}^0_\rho$ $(I\in\mathscr{B}'_\rho)$ тогда и только тогда, когда I является максимальным идеалом в* $(\mathscr{B}^0/\rho, \leq)$ $((\mathscr{B}'/\rho, \leq))$.

Доказательство. Пусть $I\in\mathscr{B}^0_\rho$ $(I\in\mathscr{B}'_\rho)$. Так как I — направленное множество, то для любых двух его элементов x и y существует элемент $z\in I$, являющийся верхней гранью множества $\{x, y\}$. Тогда из следствия 1.18 и леммы 1.16 заключаем, что I является идеалом. Так как любой идеал является направленным множеством, то из максимальности семейства I как направленное множество следует и его максимальность как идеал.

Пусть теперь I — максимальный идеал. Тогда I является направленным множеством, и из леммы 1,15 следует, что существует максимальное направленное множество J, содержащее I. Но мы только что показали, что тогда J является идеалом. Так как I — максимальный идеал, то $I=J$. Следовательно, I является максимальным направленным множеством. Лемма доказана.

1.21. Теперь можем доказать следующую основную лемму:

Лемма. *Пусть* $\mathscr{B}$ — *π-семейство в пространстве* X, *замкнутое относительно конечных пересечений своих элементов, и пусть* cX — *бикомпактное расширение пространства* X, *совершенное относительно всех элементов семейства* $\mathscr{B}$. *Пусть семейство* $\sigma^0=\{B^c:B\in\mathscr{B}^0\}$ $(\sigma'=\{B^c:B\in\mathscr{B}'\})$ *не пусто и пусть* I — *идеал в упорядоченном множестве* $(\mathscr{B}^0/\rho, \leq)$ — (в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$). *Тогда семейство* $I^c=\{B^c:[B]\in I\}$ *является* σ^0-*фильтром* (σ'-*фильтром*). *Наоборот, если семейство* $\mathscr{V}$ *является* σ^0-*фильтром* (σ'-*фильтром*), *то семейство* $I_{\mathscr{V}}=\{[A]:A^c\in\mathscr{V}\}$ *является идеалом в* $(\mathscr{B}^0/\rho, \leq)$ (в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$). *При этом, если* I *является максимальным идеалом в* $(\mathscr{B}^0/\rho, \leq)$ (в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$), *то семейство* I^c *является* σ^0-*ультрафильтром* (σ'-*ультрафильтром*) *и, наоборот, если семейство* $\mathscr{V}$ *является* σ^0-*ультрафильтром* (σ'-*ультрафильтром*), *то* $I_{\mathscr{V}}$ *является максимальным идеалом в* $(\mathscr{B}^0/\rho, \leq)$ (в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$).

Доказательство. Из замечания 1.4. а) следует, что σ^0 и σ' — замкнутые относительно непустых конечных пересечений своих элементов семейства.

Пусть I — идеал в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$. Покажем, что I^c — σ'-фильтр. Пусть A^c и B^c — элементы семейства I^c. Тогда $[A]$ и $[B]$ — элементы идеала I. Следовательно, существует элемент $[C]\in I$, такой, что $[C]=\sup\{[A], [B]\}$ в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$. Из следствия 1.18 (точнее, из его доказательства) получаем, что $[C]=[A\cap B]$, т. е. $A\cap B\in\mathscr{B}'$. Тогда из замечания 1.4 следует, что $(A\cap B)^c\neq\emptyset$ и $(A\cap B)^c=A^c\cap B^c$, т. е. $A^c\cap B^c\in I^c$. Пусть теперь $A^c\in I^c$, $B^c\in\sigma'$ и $A^c\subset B^c$. Тогда из леммы 1.2 заключаем, что множество $\mathrm{cl}_X A\setminus B$ бикомпактно, т. е. $[B]\leq[A]$, а так как I — идеал и $[A]\in I$, то и $[B]\in I$. Следовательно, $B^c\in I^c$; этим доказано, что I^c является σ'-фильтром.

Пусть $\mathscr{V}$ — σ'-фильтр. Покажем, что множество $I_{\mathscr{V}}$ является идеалом в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$. Пусть $[A]\in I_{\mathscr{V}}$, $B\in\mathscr{B}'$ и $[B]\leq[A]$. Тогда из леммы 1.2 следует, что $B^c\supset A^c$, а так как $B^c\in\sigma'$ и $A^c\in\mathscr{V}$, то и $B^c\in\mathscr{V}$. Следовательно, $[B]\in I_{\mathscr{V}}$, т. е. $[A]^\nabla\subset I_{\mathscr{V}}$. Пусть теперь $[A]$ и $[B]$ — элементы семейства $I_{\mathscr{V}}$. Тогда A^c и B^c — элементы фильтра $\mathscr{V}$. Следовательно, $A^c\cap B^c\in\mathscr{V}$ и так как $A^c\cap B^c=(A\cap B)^c$, то $(A\cap B)^c\in\mathscr{V}$, т. е. $[A\cap B]\in I_{\mathscr{V}}$. Тогда, как и в лемме 1.17, получаем, что $[A\cap B]=\sup\{[A], [B]\}$. Следовательно, $I_{\mathscr{V}}$ — идеал в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$.

Пусть I — максимальный идеал в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$. Тогда I^c — σ'-фильтр. Если $\mathscr{V}$—σ'-фильтр и $\mathscr{V}\supsetneqq I^c$, то $I_{\mathscr{V}}$ — идеал в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$ и, очевидно, $I_{\mathscr{V}}\supset I$ и $I_{\mathscr{V}}\neq I$. Полученное противоречие с максимальностью идеала I показывает, что I^c — σ'-ультрафильтр. Таким же способом устанавливаем, что если $\mathscr{V}$ — σ'-ультрафильтр, то $I_{\mathscr{V}}$ является максимальным идеалом в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$.

Аналогично доказываются и все утверждения относительно семейств σ^0 и $\mathscr{B}^0$. Лемма доказана.

1.22. Обозначения. Пусть $(P, \leq)$ — упорядоченное множество. Через $M(P)$ будем обозначать множество всех максимальных элементов упорядоченного множества $(P, \leq)$, а через $\Gamma(P)$ — множество всех главных максимальных идеалов в $(P, \leq)$. Будем писать также: $m(P)=|M(P)|$ и $M^{\triangledown}(P)=\{m^{\triangledown}: m\in M(P)\}$.

1.23. Замечание. Очевидно, что если $m\in M(P)$, то $m^{\vee}$ является максимальным направленным подмножеством в $(P, \leq)$ и, наоборот, если I является максимальным направленным множеством и, кроме того, I — главный идеал в $(P, \leq)$, т. е. существует $m\in P$, такое, что $I=m^{\triangledown}$, то $m\in M(P)$.

Пусть в $(P, \leq)$ множества максимальных направленных подмножеств и максимальных идеалов совпадают. Тогда из сказанного выше следует, что $\Gamma(P)=M^{\triangledown}(P)$, т. е. получаем, что $m(P)=|\Gamma(P)|$.

1.24. Определения. *Напомним, что открытые подмножества A и B пространства X называются квазидизъюнктными, если множество* $\mathrm{cl}_X(A\cap B)$ *бикомпактно.*

Пусть $\mathscr{B}$ — семейство открытых в пространстве X множеств. Числом (квазичислом) Суслина $c(\mathscr{B})$, соответственно $\mathrm{qc}(\mathscr{B})$, *семейства $\mathscr{B}$ назовем наименьшее из всех кардинальных чисел τ, удовлетворяющих следующему условию: мощность каждого дизъюнктного* (*квазидизъюнктного*) *подсемейства семейства $\mathscr{B}$ не превосходит τ.* (*Очевидно, всегда* $c(\mathscr{B})\leq \mathrm{qc}(\mathscr{B})$.) *Будем говорить также, что семейство $\mathscr{B}$ квазизамкнуто относительно взятия конечных пересечений, если из того, что A и B не квазидизъюнктные элементы семейства $\mathscr{B}$, следует, что $A\cap B\in\mathscr{B}$.*

Пусть $\mathscr{B}$ — π-семейство в пространстве X. Элементы $[A]$, $[B]$ множества $\mathscr{B}/\rho$ будем называть квазидизъюнктными, если A и B — квазидизъюнктные множества. (Легко доказывается, что это определение корректно.)

1.25. Лемма. *Пусть $\mathscr{B}$ — π-семейство в пространстве X и $\mathscr{B}=\mathscr{B}^0$. Пусть $[A]$ и $[B]$ — квазидизъюнктные элементы множества $\mathscr{B}/\rho$ и пусть $[A]\in\Phi_1, [B]\in\Phi_2$, где $\Phi_i\in\mathscr{B}_\rho$, $i=1, 2$. Тогда $[A]$ и $[B]$ — несравнимые элементы упорядоченного множества $(\mathscr{B}/\rho, \leq)$ и $\Phi_1\neq\Phi_2$.*

Доказательство. Допустим, что $[A]\geq[B]$. Тогда $\mathrm{cl}A\setminus B$ — бикомпакт, а так как и $\mathrm{cl}(A\cap B)$ — бикомпакт, из включения $\mathrm{cl}A\subset(\mathrm{cl}A\setminus B)\cup\mathrm{cl}(A\cap B)\cup\mathrm{Fr}A$ получаем, что $\mathrm{cl}A$ — бикомпакт, т. е. $A\notin\mathscr{B}^0=\mathscr{B}$. Получили противоречие. Аналогично рассуждаем, если $[A]\leq[B]$. Следовательно, $[A]$ и $[B]$ — несравнимые элементы упорядоченного множества $(\mathscr{B}/\rho, \leq)$.

Допустим, что $\Phi_1=\Phi_2$ и обозначим $\Phi=\Phi_1$. Тогда существует $[C]\in\Phi$, такое, что $[A]\leq[C]$ и $[B]\leq[C]$, т. е. $\mathrm{cl}\,C\setminus A$ и $\mathrm{cl}\,C\setminus B$ — бикомпактные множества. Теперь из включения $\mathrm{cl}\,C\subset(\mathrm{cl}\,C\setminus A)\cup(\mathrm{cl}\,C\setminus B)\cup\mathrm{cl}\,(A\cap B)$ получаем, что $\mathrm{cl}\,C$ — бикомпакт, т. е. $C\notin\mathscr{B}$, что невозможно. Следовательно, $\Phi_1\neq\Phi_2$. Лемма доказана.

1.26. Следствие. *Пусть $\mathscr{B}$ — π-семейство в пространстве X и $\mathscr{B}=\mathscr{B}^0$. Тогда* $\mathrm{qc}(\mathscr{B})\leq|\mathscr{B}_\rho|$.

Доказательство. Все следует из леммы 1.15 и леммы 1.25.

1.27. Лемма. *Пусть $\mathscr{B}$ — π-семейство в пространстве X, квазизамкнутое относительно взятия конечных пересечений и $\mathscr{B}=\mathscr{B}^0$. Тогда, если $[A]$ и $[B]$ — различные максимальные элементы упорядоченного множества $(\mathscr{B}/\rho, \leq)$, то $[A]$ и $[B]$ квазидизъюнктны, а если любой максимальный идеал в $(\mathscr{B}/\rho, \leq)$ является главным идеалом, то* $\mathrm{qc}(\mathscr{B})=m(\mathscr{B}/\rho)=|\mathscr{B}_\rho|$.

Доказательство. Пусть $[A]$ и $[B]$ — различные максимальные элементы упорядоченного множества $(\mathscr{B}/\rho, \leq)$. Допустим, что они не квазидизъюнктны. Тогда $C=A\cap B\in\mathscr{B}$ и $[C]\geq[A]$, $[C]\geq[B]$. Следовательно, $[A]=[C]=[B]$. Полученное противоречие показывает, что $[A]$ и $[B]$ квазидизъюнктны.

Пусть любой максимальный идеал в $(\mathscr{B}/\rho, \leq)$ является главным идеалом. Тогда из леммы 1.20 следует, что множества $\mathscr{B}_\rho$ и $\Gamma(\mathscr{B}/\rho)$ совпадают, а из замечания 1.23 получаем, что $\mathscr{B}_\rho=M^\nabla(\mathscr{B}/\rho)$, т.е. $|\mathscr{B}_\rho|=|M^\nabla(\mathscr{B}/\rho)|=m(\mathscr{B}|\rho)$. Из доказанного в предыдущем абзаце утверждения следует, что семейство $\{B\in\mathscr{B}: [B]\in M(\mathscr{B}/\rho)\}$ квазидизъюнктно. Следовательно, $m(\mathscr{B}/\rho)\leq \mathrm{qc}(\mathscr{B})$. Но из следствия 1.26 имеем, что $\mathrm{qc}(\mathscr{B})\leq|\mathscr{B}_\rho|$, а так как у нас $|\mathscr{B}_\rho|=m(\mathscr{B}/\rho)$, то получаем, что $\mathrm{qc}(\mathscr{B})=m(\mathscr{B}/\rho)=|\mathscr{B}_\rho|$. Лемма доказана.

2. О пространствах, имеющих бикомпактное расширение с нульмерно расположенным наростом с наперед заданным π-весом. 2.1. Прежде всего напомним, что семейство $\mathscr{B}$ открытых подмножеств пространства X называется π-базой пространства X, если для любого открытого непустого множества A существует $B\in\mathscr{B}$, такое, что $B\subset A$, $B\neq\emptyset$. π-весом пространства X называется кардинальное число $\pi\,\mathrm{w}(X)=\aleph_0 \min\{|\mathscr{B}|:\mathscr{B}$ — π-база пространства $X\}$. Далее, пространство X называется пространством счетного типа, если для любого бикомпакта $\Phi\subset X$ существует бикомпакт C счетного характера в X, такой, что $\Phi\subset C$. Теперь сформулируем одну теорему, принадлежащую Скляренко [6], о связи между нульмерно расположенным и нульмерным (в смысле ind) наростом (конечно, если нарост нульмерно расположен, то он нульмерен в смысле ind):

Теорема (Е. Г. Скляренко). *Если X — пространство счетного типа и cX — его бикомпактное расширение с нульмерным (в смысле* ind, Ind *или* dim) *наростом, то нарост $cX\setminus X$ нульмерно расположен в cX.*

Следовательно, в классе пространств счетного типа мы можем говорить о нульмерных (в любом смысле) наростах вместо о нульмерно расположенных наростах. Отметим также, что из нульмерной расположенности нароста непосредственно следует периферическая бикомпактность пространства.

2.2. Определение. *Пусть $(P,\leq)$ — упорядоченное множество. Базой упорядоченного множества P будем называть любое подмножество $B\subset P$, такое, что $P=\bigcup\{b^\nabla: b\in B\}$. Весом упорядоченного множества P будем называть кардинальное число* $\mathrm{w}(P)=\inf\{|B|:$ *B — база упорядоченного множества P*$\}$.

2.3. Следующая лемма о π-базах доказывается в точности так же, как и аналогичная лемма о базах (см., напр., [2]):

Лемма. *Если $\mathscr{B}$ — π-база пространства X, то существует π-база $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}$, такая, что* $|\mathscr{B}_1|=\pi\mathrm{w}(X)$.

2.4. Теорема. *Если τ — кардинальное число, то у пространства X имеется бикомпактное расширение cX с нульмерно расположенным наростом, такое, что* $\pi\mathrm{w}(cX\setminus X)=\tau$ *тогда и только тогда, когда пространство X имеет π-бикомпактную базу $\mathscr{B}$, для которой* $\mathrm{w}(\mathscr{B}^0/\rho)=\tau$.

Доказательство. А) Пусть cX — бикомпактное расширение пространства X с нульмерно расположенным наростом, такое, что $\pi\mathrm{w}(cX\setminus X)=\tau$. Покажем, что пространство X имеет π-бикомпактную базу $\mathscr{B}$, такую, что $\mathrm{w}(\mathscr{B}^0/\rho)=\tau$. Из теоремы 1.10 (Е. Г. Скляренко) следует, что существует π-бикомпактная база $\mathscr{B}$ пространства X, такая, что $cX=c_{\mathscr{B}}X$ (см. п. 1.8). Покажем, что $\mathrm{w}(\mathscr{B}^0/\rho)=\tau$.

Как и в доказательстве леммы 1.12, получаем, что семейство $\sigma=\{B^c: [B]\in\mathscr{B}^0/\rho\}$ является базой пространства $cX\setminus X$; при этом $\sigma=\{B^c: B\in\mathscr{B}, B^c\neq\emptyset\}$. Из леммы 2.3 получаем, что существует π-база $\sigma'\subset\sigma$ пространства

$cX\setminus X$, такая, что $|\sigma'|=\tau$. Пусть $P=(\mathscr{B}^0/\rho, \leq)$ и $A=\{[B]\in\mathscr{B}^0/\rho : B^c\in\sigma'\}$. Покажем, что множество A является базой упорядоченного множества P. Действительно, если $[B]\in\mathscr{B}^0/\rho$, то B^c открыто в $cX\setminus X$ и $B^c\neq\emptyset$. Следовательно, существует $E\in\sigma'$, такое, что $E\subset B^c$. Но $E=C^c$, где $[C]\in A$, т. е. $C^c\subset B^c$. Теперь из лемм 1.9 и 1.2 заключаем, что множество $\mathrm{cl}_X C\setminus B$ бикомпактно, т. е. $[B]\leq[C]$. Следовательно, $[B]\in[C]^\nabla$, где $[C]\in A$. Так как $|A| =|\sigma'|=\tau$, то $w(P)\leq\tau$. Допустим, что $w(P)<\tau$. Тогда существует база A упорядоченного множества P, такая, что $|A|<\tau$. Пусть $\sigma_A=\{B^c : [B]\in A\}$ (из каждого класса эквивалентности берем только один представитель). Очевидно $|\sigma_A|=|A|<\tau$. Покажем, что σ_A — π-база пространства $cX\setminus X$. Действительно, пусть C — открытое в $cX\setminus X$ множество. Так как σ — база пространства $cX\setminus X$, то существует $[B]\in\mathscr{B}^0/\rho$, такое, что $B^c\subset C$. Так как A — база множества P, то существует $[E]\in A$, такое, что $[B]\in[E]^\nabla$, т. е. $[B]\leq[E]$. Тогда $\mathrm{cl}_X E\setminus B$ — бикомпакт, и опять из лемм 1.9 и 1.2 получаем, что $E^c\subset B^c$. Кроме того, $E^c\neq\emptyset$, $E^c\in\sigma_A$ и $E^c\subset C$, т. е. σ_A — π-база пространства $cX\setminus X$. Получаем противоречие, так как $\pi w(cX\setminus X)=\tau$. Следовательно, $w(\mathscr{B}^0/\rho)=\tau$.

Б) Пусть пространство X имеет π-бикомпактную базу $\mathscr{B}$, такую, что $w(\mathscr{B}^0/\rho)=\tau$. Построим бикомпактное расширение cX пространства X с нульмерно расположенным наростом и такое, что $\pi w(cX\setminus X)=\tau$.

Пусть cX — π-расширение пространства X, ассоциированное с π-бикомпактной базой $\mathscr{B}$, т. е. $cX\equiv c_{\mathscr{B}}X$. Покажем, что оно — искомое. Действительно, из теоремы 1.10 следует, что нарост $cX\setminus X$ нульмерно расположен в cX. Докажем, что $\pi w(cX\setminus X)=\tau$.

Имеем $\sigma=\{B^c : [B]\in\mathscr{B}^0/\rho\}$ — база пространства $cX\setminus X$. Пусть $P=(\mathscr{B}^0/\rho, \leq)$. Так как $w(P)=\tau$, то существует база A мощности τ упорядоченного множества P. Как и в A), убеждаемся, что $\sigma_A=\{B^c : [B]\in A\}$ является π-базой пространства $cX\setminus X$. Так как $|\sigma_A|=|A|=\tau$, то $\pi w(cX\setminus X)\leq\tau$. Если $\pi w (cX\setminus X)<\tau$,то существует π-база $\sigma'\subset\sigma$ пространства $cX\setminus X$, такая, что $|\sigma'|=\pi w (cX\setminus X)<\tau$ (по лемме 2.3), а тогда, как и в А), мы можем показать, что множество $C=\{[B]\in\mathscr{B}^0/\rho : B^c\in\sigma'\}$ — база упорядоченного множества P. Но $|C| =|\sigma'|<\tau$. Получаем противоречие, так как $w(P)=\tau$. Следовательно, $\pi w (cX \setminus X)=\tau$. Теорема доказана.

3. О мощности наростов π-расширений. 3.1. Обозначения. Пусть $\mathscr{B}$ — семейство подмножеств пространства X и $x\in X$. Будем писать: $\mathscr{B}_X =\{B\in\mathscr{B} : x\in B\}$ и $\cap\mathscr{B}=\cap\{B : B\in\mathscr{B}\}$. Далее, через Π всегда будем обозначать максимальное π-семейство пространства X, а через ΦX — бикомпактное расширение Фрейденталя — Морита [8,11] периферически бикомпактного пространства X(ΦX — это наибольшее бикомпактное расширение пространства X с нульмерным (в смысле ind) наростом).

3.2. Следующая лемма стандартна, и поэтому мы приводим ее без доказательства:

Лемма. *Пусть X — локально бикомпактное пространство, $\mathscr{B}$ — база в X, состоящая из открыто-замкнутых множеств и замкнутая относительно конечных пересечений своих элементов, $\mathscr{V}\subset\mathscr{B}$ и $\mathscr{V}$ — $\mathscr{B}$-ультрафильтр. Тогда:* а) *для любого $x\in X$ семейство $\mathscr{B}_x$ является $\mathscr{B}$-ультрафильтром*; б) *если $x\in\cap\mathscr{V}$, то $\mathscr{V}=\mathscr{B}_x$*; в) *если $\cap\mathscr{V}\neq\emptyset$, то $|\cap\mathscr{V}|=1$*; г) *$\cap\mathscr{V}\neq\emptyset$ тогда и только тогда, когда семейство $\mathscr{V}$ содержит бикомпактный элемент.*

Нам будут нужны также следующие хорошо известные леммы (см., напр., [3]):

3.3. Лемма. *Пусть cX — бикомпактное расширение пространства X. Тогда* $\mathrm{cl}_{cX}(cX\setminus X)=(cX\setminus X)\cup R(X)$.

3.4. Лемма. *Нарост $cX\setminus X$ бикомпактен тогда и только тогда, когда пространство X локально бикомпактно.*

3.5. Следствие. *Нарост $cX\setminus X$ локально бикомпактен тогда и только тогда, когда подпространство $R(X)$ бикомпактно.*

3.6. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — π-бикомпактная база пространства X, подпространство $R(X)$ бикомпактно и cX — π-расширение пространства X, ассоциированное с базой $\mathscr{B}$ (т. е. $cX=c_{\mathscr{B}}X$). Тогда $|cX\setminus X|=|\mathscr{B}'_\rho|$.*

Доказательство. Мы уже показывали (см. доказательство леммы 1.12), что семейство $\sigma=\{B^c\colon B\in\mathscr{B}^0\}$ является базой пространства $cX\setminus X$, состоит из непустых множеств и $\sigma=\{B^c\colon B\in\mathscr{B},\ B^c\neq\varnothing\}$. Кроме того, из леммы 1.9 следует, что σ состоит из открыто-замкнутых в $cX\setminus X$ множеств. Так как $R(X)$ — бикомпакт, то из следствия 3.5 получаем, что пространство $cX\setminus X$ локально бикомпактно.

Пусть $B\in\mathscr{B}^0$ и $x\in B^c$. Так как $R(X)$ — бикомпакт, а семейство $\mathrm{Ex}_c\mathscr{B}=\{\mathrm{Ex}_c(B):B\in\mathscr{B}\}$ — база бикомпакта cX, то существует $A\in\mathscr{B}$, такой, что $x\in\mathrm{Ex}_c(A)\subset\mathrm{cl}_{cX}\mathrm{Ex}_c(A)\subset\mathrm{Ex}_c(B)\cap(cX\setminus R(X))$. Очевидно $x\in A^c\subset B^c$ и $A\in\mathscr{B}'$. Следовательно, семейство $\sigma'=\{B^c:B\in\mathscr{B}'\}$ — база пространства $cX\setminus X$. Кроме того, если $B^c\in\sigma'$, то B^c — бикомпакт. Действительно, $B^c=X^c\cap\mathrm{Ex}_c(B)=X^c\cap\mathrm{cl}_{cX}\mathrm{Ex}_c(B)=X^c\cap\mathrm{cl}_{cX}B=\mathrm{cl}_{cX}(\mathrm{cl}_X B)\setminus\mathrm{cl}_X B$ и если $T=\mathrm{cl}_X B$, то $B^c=cT\setminus T$, где $cT=\mathrm{cl}_{cX}T$. Но $T=\mathrm{cl}_X T\subset\mathscr{L}(X)$ и, следовательно, T локально бикомпактно, а тогда из леммы 3.4 следует, что $B^c=cT\setminus T$ — бикомпакт.

Итак, σ' — база локально бикомпактного пространства $cX\setminus X$, состоящая из открытых бикомпактных множеств. Кроме того, из замечания 1.4 и определения семейства $\mathscr{B}'$ следует, что σ' — замкнутое относительно непустых конечных пересечений своих элементов семейство.

Пусть $\mathscr{V}\in\mathscr{B}'_\rho$. Из леммы 1.20 следует, что $\mathscr{V}$ — максимальный идеал в $(\mathscr{B}'/\rho,\ \leq)$, а тогда, по лемме 1.21, семейство $\mathscr{V}^c=\{\Phi^c:[\Phi]\in\mathscr{V}\}$ является σ'-ультрафильтром в $cX\setminus X$. Тогда из леммы 3.2 получаем, что $\bigcap\mathscr{V}^c\neq\varnothing$ и $|\bigcap\mathscr{V}^c|=1$. Пусть $\bigcap\mathscr{V}^c=x_{\mathscr{V}}$; тогда $x_{\mathscr{V}}\in cX\setminus X$. Определим соответствие $\varphi:\mathscr{B}'_\rho\to cX\setminus X$ формулой $\varphi(\mathscr{V})=x_{\mathscr{V}}$ для любого $\mathscr{V}\in\mathscr{B}'_\rho$. Покажем, что φ отображает $\mathscr{B}'_\rho$ взаимно-однозначно на множество $cX\setminus X$. Действительно, пусть $\varphi(\mathscr{V}_1)=\varphi(\mathscr{V}_2)$. Тогда $\bigcap\mathscr{V}_1^c=x_{\mathscr{V}_1}=x_{\mathscr{V}_2}=\bigcap\mathscr{V}_2^c=x$ и из леммы 3.2 следует, что $\mathscr{V}_1^c=\sigma'_x=\mathscr{V}_2^c$. Но $\mathscr{V}_1=I_{\mathscr{V}_1^c}=\{[B]\in\mathscr{B}'/\rho:B^c\in\mathscr{V}_1^c\}=\{[B]\in\mathscr{B}'/\rho:B^c\in\mathscr{V}_2^c\}=I_{\mathscr{V}_2^c}=\mathscr{V}_2$, т. е. $\mathscr{V}_1=\mathscr{V}_2$. Пусть теперь $x\in cX\setminus X$ и $\Psi=\sigma'_x$. Тогда, по лемме 3.2, Ψ является σ'-ультрафильтром и $x=\bigcap\Psi$. Из леммы 1.21 следует, что $I_\Psi=\{[B]\in\mathscr{B}'/\rho:B^c\in\Psi\}$ является максимальным идеалом в $(\mathscr{B}'/\rho,\ \leq)$, а тогда, по лемме 1.20, $I_\Psi\in\mathscr{B}'_\rho$. Кроме того, очевидно, $(I_\Psi)^c=\Psi$. Следовательно, $\varphi(I_\Psi)=x$.

Итак, φ отображает $\mathscr{B}'_\rho$ взаимно-однозначно на множество $cX\setminus X$. Следовательно, $|cX\setminus X|=|\mathscr{B}'_\rho|$. Теорема доказана.

3.7. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — π-бикомпактная база пространства X и cX — π-расширение пространства X, ассоциированное с базой $\mathscr{B}$. Тогда $|\mathscr{L}(cX\setminus X)|=|\mathscr{B}'_\rho|$.*

Доказательство. Из леммы 3.3 следует, что $\mathscr{L}(cX\setminus X)=(cX\setminus X)\setminus \mathrm{cl}_{cX}R(X)$. Тогда, как и в доказательстве теоремы 3.6, получаем, что семейство $\sigma'=\{B^c : B\in\mathscr{B}'\}$ — открытая база пространства $\mathscr{L}(cX\setminus X)$, все элементы которой бикомпактны (если $B\in\mathscr{B}'$, то $B^c\subset\mathscr{L}(cX\setminus X)$, так как $Ex_c\mathscr{L}(X)=cX\setminus\mathrm{cl}_{cX}R(X)$, т. е. $(\mathscr{L}(X))^c=\mathscr{L}(cX\setminus X)$, а из включения $B\subset\mathscr{L}(X)$ следует, что $\mathrm{Ex}_c(B)\subset\mathrm{Ex}_c(\mathscr{L}(X))$. Продолжая как в доказательстве теоремы 3.6, получаем искомое утверждение. Теорема доказана.

3.8. Теорема. *Пусть $\mathscr{B}$ — π-бикомпактная база пространства X, а cX — π-расширение пространства X, ассоциированное с базой $\mathscr{B}$. Тогда $|\mathscr{B}'_\rho|\leq|cX\setminus X|\leq|\mathscr{B}^0_\rho|$.*

Доказательство. Так как, по теореме 3.7, $|\mathscr{B}'_\rho|=|\mathscr{L}(cX\setminus X)|\leq|cX\setminus X|$, то левое неравенство доказано. Пусть $\sigma^0=\{B^c : B\in\mathscr{B}^0\}$. Тогда, как мы уже показывали, σ^0 — открыто-замкнутая база пространства $cX\setminus X$, замкнутая относительно непустых конечных пересечений своих элементов. Из этого сразу получается, что для любой точки $x\in cX\setminus X$ семейство $(\sigma^0)_x$ является σ^0-ультрафильтром. Тогда из лемм 1.21 и 1.20 следует, что семейство $I_{(\sigma^0)_x}=\{[B]\in\mathscr{B}^0/\rho : B^c\in(\sigma^0)_x\}$ является элементом множества $\mathscr{B}^0_\rho$, при этом различным точкам x_1 и x_2 пространства $cX\setminus X$ соответствуют различные элементы множества $\mathscr{B}^0_\rho$. Следовательно, $|cX\setminus X|\leq|\mathscr{B}^0_\rho|$. Теорема доказана.

3.9. Хорошо известно [6], что если X — периферически бикомпактное пространство, то бикомпактное расширение $c_\Pi X$, ассоциированное с π-бикомпактной базой Π (см. п. 3.1), совпадает с расширением Фройденталя — Морита ΦX. Тогда из теорем 3.6 — 3.8 получаем такие следствия:

Следствие. *Если τ — кардинальное число и X — периферически бикомпактное пространство, то нарост $\Phi X\setminus X$ локально бикомпактен и $|\Phi X\setminus X|=\tau$ тогда и только тогда, когда $R(X)$ — бикомпакт и $|(\Pi')_\rho|=\tau$.*

3.10. Следствие. $|(\Pi')_\rho|\leq|\Phi X\setminus X|\leq|(\Pi^0)_\rho|$.

3.11. Можно получать также следствия следующего типа:

Следствие. *Если $R(X)$ — бикомпакт, то X является пространством Циппина тогда и только тогда, когда в X имеется π-бикомпактная база $\mathscr{B}$, такая, что $|\mathscr{B}'_\rho|\leq\aleph_0$.* (Пространство X называется пространством Циппина, если оно имеет бикомпактное расширение cX со счетным наростом. Тогда cX непременно является π-расширением (см. [13] и теорему 1.10).).

4. О наростах без точек локальной бикомпактности. 4.1. Рассмотрим такие задачи: охарактеризовать в терминах, относящихся к топологии самих пространств, те пространства X, для которых: (задача 1) существует нарост без точек локальной бикомпактности; (задача 2) наросты во всех бикомпактных расширениях cX пространства X не имеют точек локальной бикомпактности.

Предложение. *Пространство X имеет бикомпактное расширение cX с нульмерно расположенным наростом без точек локальной бикомпактности тогда и только тогда, когда существует π-бикомпактная база $\mathscr{B}$ пространства X, такая, что из $A\in\mathscr{B}$ и $A\supset R(X)$ следует, что множество $X\setminus A$ бикомпактно.*

Доказательство. Из теорем 1.10 и 3.7 заключаем, что все сводится к тому, что условия, данные в предложении, должны быть необходимыми и достаточными для пустоты множества $\mathscr{B}'_\rho$. Покажем, что это так. Действительно, пусть $\mathscr{B}$ — π-бикомпактная база. Ввиду леммы 1.15 имеем: $\mathscr{B}'_\rho=\emptyset$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{B}'/\rho=\emptyset$, т. е. когда $\mathscr{B}'=\emptyset$. Так как $\mathscr{B}'=\{B\in\mathscr{B}:\operatorname{cl}_X B\subset\mathscr{L}(X)$ и $\operatorname{cl}_X B$ не бикомпактно$\}$, то очевидно $\mathscr{B}'=\emptyset$ тогда и только тогда, когда из того, что $B\in\mathscr{B}$ и $B\supset R(X)$, следует, что множество $\operatorname{cl}_X(X\setminus\operatorname{cl}_X B)$ бикомпактно. Но $\operatorname{cl}(X\setminus\operatorname{cl}B)\subset X\setminus B$ и $X\setminus B=\operatorname{cl}(X\setminus\operatorname{cl}B)\cup\operatorname{Fr}B$. Так как $\operatorname{Fr}B$ — бикомпакт, то $\operatorname{cl}(X\setminus\operatorname{cl}B)$ бикомпактно тогда и только тогда, когда $X\setminus B$ — бикомпакт. Предложение доказано.

4.2. Теперь из предложения 4.1 и замечаний, сделанных в п. 3.9, сразу получаем следующую теорему:

Теорема. *$\Phi X\setminus X=R(\Phi X\setminus X)$ тогда и только тогда, когда из того, что множество A открыто в X, $\operatorname{Fr}_X A$ — бикомпакт и $A\supset R(X)$, следует, что подпространство $X\setminus A$ бикомпактно.*

4.3. Замечания. а. Хорошо известно, что если $X=R(X)$ и $f:X\xrightarrow{\text{на}}Y$ — совершенное отображение, то $Y=R(Y)$ (см., напр., [9]). Следовательно, если c_1X и c_2X — бикомпактные расширения пространства X и $c_1X\geqq c_2X$, то из $R(c_1X\setminus X)=c_1X\setminus X$ следует, что $R(c_2X\setminus X)=c_2X\setminus X$.

б. Так как пространство X периферически бикомпактно тогда и только тогда, когда оно имеет бикомпактное расширение с нульмерно расположенным наростом (см. [1]), то данное в предложении 4.1 (а тем более, в теореме 4.2) условие является достаточным для того, чтобы у периферически бикомпактного пространства X был нарост без точек локальной бикомпактности, и оно будет и необходимым, если для любого бикомпактного расширения cX пространства X существует π-расширение c_1X, такое, что $cX\geqq c_1X$.

4.4. Предложение. *Для любого бикомпактного расширения cX пространства X имеем $R(cX\setminus X)=cX\setminus X$ тогда и только тогда, когда из того, что A и B — дизъюнктные нуль-множества в X и $A\supset R(X)$, следует, что множество B бикомпактно.* (Множество $A\subset X$ называется нуль-множеством, если существует непрерывная функция $f:X\to[0,1]$, такая, что $A=f^{-1}(0)$.)

Доказательство. А. Пусть для любого $cX: R(cX\setminus X)=cX\setminus X$. Пусть A и B — дизъюнктные нуль-множества в X и $A\supset R(X)$. Тогда $\operatorname{cl}_{\beta X}A\cap\operatorname{cl}_{\beta X}B=\emptyset$. Но $\operatorname{cl}_{\beta X}A\supset\operatorname{cl}_{\beta X}R(X)$, а из леммы 3.3 следует, что $\operatorname{cl}_{\beta X}R(X)=R(X)\cup R(\beta X\setminus X)$. Так как $R(\beta X\setminus X)=\beta X\setminus X$, то $\operatorname{cl}_{\beta X}A\supset\beta X\setminus X$. Следовательно, $\operatorname{cl}_{\beta X}B\subset X$, т. е. $\operatorname{cl}_{\beta X}B=\operatorname{cl}_X B=B$. Тем самым мы показали, что множество B бикомпактно.

Б. Пусть пространство X такое, что если A и B — дизъюнктные нуль-множества и $A\supset R(X)$, то B — бикомпакт. Покажем, что тогда $R(\beta X\setminus X)=\beta X\setminus X$. Допустим, что $\mathscr{L}(\beta X\setminus X)\neq\emptyset$. Пусть $x\in\mathscr{L}(\beta X\setminus X)$. Следовательно, $x\,\overline{\in}\,\operatorname{cl}_{\beta X}R(X)$. Тогда существует открытое в βX множество Ox, такое, что $x\in Ox$ и $\operatorname{cl}_{\beta X}Ox\cap\operatorname{cl}_{\beta X}R(X)=\emptyset$. Так как пространство βX нормально, то существует непрерывная функция $f:\beta X\to[0,1]$, такая, что $f(\operatorname{cl}_{\beta X}Ox)=0$ и $f(\operatorname{cl}_{\beta X}R(X))=1$. Пусть $Z_1=f^{-1}(1)$, $Z=Z_1\cap X$, $F_1=f^{-1}(0)$, $F=F_1\cap X$. Очевидно, F и Z — дизъюнктные нуль-множества, $Z\supset R(X)$ и $F\supset Ox\cap X\neq\emptyset$. Тогда $\operatorname{cl}_{\beta X}F\supset\operatorname{cl}_{\beta X}(Ox\cap X)=\operatorname{cl}_{\beta X}Ox$. Следовательно, $x\in\operatorname{cl}_{\beta X}F$, т. е. множество F не бикомпактно. Полученное противоречие показывает, что $\mathscr{L}(\beta X\setminus X)=\emptyset$, т. е. $R(\beta X\setminus X)=\beta X\setminus X$. Тогда из замечания 4.3. а. следует, что для любого бикомпактного расширения cX пространства X имеем $R(cX\setminus X)=cX\setminus X$. Предложение доказано.

4.5. Следствие. *Если X нормально, то для любого бикомпактного расширения cX пространства X, $R(cX\setminus X)=cX\setminus X$ тогда и только тогда, когда для любого открытого в X множества A, содержащего множества $R(X)$, подпространство $X\setminus A$ бикомпактно.*

Доказательство. Так как множество $R(X)$ замкнуто в X и пространство X нормально, то все сразу следует из предложения 4.4. Следствие доказано.

4.6. Итак, мы полностью решили задачу 2 из п. 4.1. Теперь докажем одно предложение, из которого и возникла эта задача. Так как нам будет нужна одна теорема из [12], то мы напомним ее:

Теорема (М. Рейбърн). *Если X и Y — вполне регулярные пространства, то у пространства X имеется бикомпактное расширение cX, такое, что Y гомеоморфно наросту $cX\setminus X$ тогда и только тогда, когда существует бикомпактное расширение cY и непрерывное отображение $h:\mathrm{cl}_{\beta X}(\beta X\setminus X)\xrightarrow{\text{на}} cY$, отображающее множество $R(X)$ на множество $cY\setminus Y$ гомеоморфно.*

4.7. Предложение. *Если все наросты пространства X не имеют точек локальной бикомпактности, $Z=R(X)$ и $c_0Z=\mathrm{cl}_{\beta X}R(X)$, то множество $N(X)$ совпадает с множеством $N_{c_0}(Z)=\{cZ\setminus Z: cZ\in K(Z)$ и $cZ\leq c_0Z\}$, рассматриваемое с точностью до гомеоморфизма.* (Для любого пространства X обозначим через $K(X)$ множество его бикомпактных расширений с точностью до эквивалентности и пусть $N(X)=\{cX\setminus X: cX\in K(X)\}$ (с точностью до гомеоморфизма).)

Доказательство. Так как для любого бикомпактного расширения cX пространства X имеет место $R(cX\setminus X)=cX\setminus X$, то из леммы 3.3 следует, что $\mathrm{cl}_{cX}R(X)=\mathrm{cl}_{cX}(cX\setminus X)$, т. е. если $cZ=\mathrm{cl}_{cX}R(X)$, то $cZ\setminus Z=cX\setminus X$; кроме того, $R(Z)=Z$. В частности, $c_0Z=\mathrm{cl}_{\beta X}(\beta X\setminus X)$. Следовательно, $N(X)\subset N_{c_0}(Z)$. Покажем, что $N_{c_0}(Z)\subset N(X)$. Действительно, пусть $cZ\in K(Z)$ и $cZ\leq c_0Z$. Тогда существует непрерывное отображение $h:c_0Z\xrightarrow{\text{на}} cZ$, такое, что $hc_0=c$, где $c_0: Z\to c_0Z$ и $c:Z\to cZ$ — гомеоморфные вложения. Как известно, $h(c_0Z\setminus Z)=cZ\setminus Z$. Пусть $Y=cZ\setminus Z$. Так как $Z=R(X)$ и $R(Z)=Z$, то $\mathrm{cl}_ZY=\mathrm{cl}_Z(cZ\setminus Z)=cZ$. Обозначим: $cY=\mathrm{cl}_ZY=cZ$. Тогда $R(X)=Z=cY\setminus Y$ и $h:c_0Z\xrightarrow{\text{на}} cY$, т. е. $h:\mathrm{cl}_{\beta X}(\beta X\setminus X)\xrightarrow{\text{на}} cY$ и h отображает множество $Z=R(X)$ на множество $cY\setminus Y=Z=R(X)$ гомеоморфно. Следовательно, по теореме 4.6 существует $cX\in K(X)$ такое, что $cX\setminus X$ гомеоморфно пространству $Y=cZ\setminus Z$. Следовательно, $N_{c_0}(Z)\subset N(X)$.

Итак, $N(X)=N_{c_0}(Z)$, т. е. предложение 4.7 доказано.

4.8. Напомним, что множество $A\subset X$ называется C^*-вложенным в пространстве X, если любая ограниченная непрерывная функция $f:A\to R$ продолжается до непрерывной ограниченной функции $F:X\to R$.

Следствие. *Если множество $R(X)$ C^*-вложено в пространстве X и все наросты пространства X не имеют точек локальной бикомпакности, то у пространств X и $R(X)$ одни и те же наросты (с точностью до гомеоморфизма).*

Доказательство. Как известно, условие C^*-вложенности множества A эквивалентно равенству $\beta A=\mathrm{cl}_{\beta X}(A)$ (см., напр., [14]). Тогда из предложения 4.7 сразу получаем, что $N(X)\equiv N(R(X))$. Следствие доказано.

4.9. Отметим также следующий частный случай:

Следствие. *Если X — нормальное пространство, такое, что для любого открытого множества $A \supset R(X)$ подпространство $X \setminus A$ бикомпактно, то наросты пространств X и $R(X)$ одни и те же (с точностью до гомеоморфизма).*

Доказательство. Так как $R(X)$ — замкнутое подмножество нормального пространства X, то $R(X)$ C^*-вложено в X. Теперь все следует из следствий 4.5 и 4.8. Следствие доказано.

4.10. Как мы уже отметили в доказательстве предложения 4.7, если все наросты пространства X являются пространствами без точек локальной бикомпактности, то $R(R(X)) = R(X)$. Легко строятся примеры, показывающие, что это необходимое условие не является, вообще говоря, достаточным. Однако, если $R(R(X)) = R(X)$ и у пространств X и $R(X)$ одни и те же наросты (с точностью до гомеоморфизма), то наросты пространства X не имеют точек локальной бикомпактности, так как таковы, очевидно, наросты пространства $Y = R(X)$; если пространство X нормально, то тогда $\beta Y = \mathrm{cl}_{\beta X} R(X)$ и из следствия 4.9 получаем такое предложение:

Предложение. *Если X—нормальное пространство и $R(R(X)) = R(X)$, то наросты пространств X и $R(X)$ совпадают (с точностью до гомеоморфизма) тогда и только тогда, когда для любого открытого в X множества A, содержащего множества $R(X)$, подпространство $X \setminus A$ бикомпактно.*

4.11. Замечание. Если, например, Q — пространство рациональных чисел, то из предложения 4.10 получаем описание всех нормальных пространств X, в которых можно вложить Q в качестве множества $R(X)$ так, что множества наростов пространств Q и X одинаковы (с точностью до гомеоморфизма). То же самое верно, если вместо Q рассмотрим пространство J иррациональных чисел.

5. О пространствах, имеющих бикомпактное расширение с нульмерно расположенным дискретным наростом с наперед заданной мощностью.

5.1. Лемма. *Если $\mathscr{B}$ — π-бикомпактная база пространства X, cX — π-расширение, ассоциированное с $\mathscr{B}$, и τ — кардинальное число, то нарост $cX \setminus X$ дискретен и $|cX \setminus X| = \tau$ тогда и только тогда, когда множество $R(X)$ бикомпактно, $|\mathscr{B}'_\rho| = \tau$ и каждый максимальный идеал в $(\mathscr{B}'_\rho/\rho, \leq)$ является главным идеалом.*

Доказательство. А. Пусть нарост $cX \setminus X$ дискретен и $|cX \setminus X| = \tau$. Тогда из следствия 3.5 и леммы 3.3 следует, что $R(X)$ — бикомпакт, а из теоремы 3.6 получаем, что $|\mathscr{B}'_\rho| = \tau$. Пусть $\mathscr{K} \in \mathscr{B}'_\rho$. По лемме 1.20, $\mathscr{K}$ является максимальным идеалом в $(\mathscr{B}'/\rho, \leq)$, а тогда из леммы 1.21 следует, что семейство $\mathscr{K} = \{U^c : [U] \in \mathscr{K}\}$ является σ'-ультрафильтром, где $\sigma' = \{U^c : U \in \mathscr{B}'\}$. Пусть $\cap \mathscr{K}^c = \{x_{\mathscr{K}}\}$ (см. лемму 3.2). Так как пространство $cX \setminus X$ дискретно, а σ' — база в $cX \setminus X$, то $\{x_{\mathscr{K}}\} \in \sigma'$, а тогда $\{x_{\mathscr{K}}\} \in \mathscr{K}^c$, т. е. существует элемент $U_{\mathscr{K}} \in \mathscr{B}'$, такой, что $\{x_{\mathscr{K}}\} = U^c_{\mathscr{K}}$ и $[U_{\mathscr{K}}] \in \mathscr{K}$. Так как для любого $[U] \in \mathscr{K}, \{x_{\mathscr{K}}\} \subset U^c$, то из леммы 1.2 получаем, что множество $\mathrm{cl}_X U_{\mathscr{K}} \setminus U$ бикомпактно. Но это и означает, что для любого $[U] \in \mathscr{K}$, $[U] \leq [U_{\mathscr{K}}]$, т. е. $\mathscr{K} = [U_{\mathscr{K}}]^\nabla$.

Б. Пусть $R(X)$ — бикомпакт, $|\mathscr{B}'_\rho| = \tau$ и для любого $\mathscr{K} \in \mathscr{B}'_\rho$ существует $[U_{\mathscr{K}}] \in \mathscr{K}$, такое, что $\mathscr{K} = [U_{\mathscr{K}}]^\nabla$. Тогда из теоремы 3.6 получаем, что $|cX \setminus X| = \tau$. Покажем, что пространство $cX \setminus X$ дискретно.

Пусть $x \in cX \setminus X$ и $\sigma' = \{U^c : U \in \mathscr{B}'\}$. Так как $cX \setminus X$ — нульмерное локально бикомпактное пространство, то из леммы 3.2 следует, что $(\sigma')_x$ является σ'-ультрафильтром. Пусть $(\sigma')_x = \Psi$. По лемме 1.21, семейство $\mathscr{K} = I_\Psi = \{[U \in \mathscr{B}'/\rho : U^c \in \Psi\}$ является максимальным идеалом в $(\mathscr{B}'/\rho, \leqq)$. Следовательно, существует $[U_x] \in \mathscr{K}$, такое, что $\mathscr{K} = [U_x]^\triangledown$. Тогда, по лемме 1.2, для любого $[U] \in \mathscr{K}$, $U_x^c \subset U^c$, т. е. $U_x^c = \cap \mathscr{K}^c$. Но $\mathscr{K}^c = \Psi$. Следовательно, $U_x^c = \cap \Psi = \cap (\sigma')_x$. Но, по лемме 3.2, $\cap (\sigma')_x = \{x\}$. Получаем, что $\{x\} = U_x^c$, т. е. $\{x\}$ — открытое множество в $cX \setminus X$. Следовательно, пространство $cX \setminus X$ дискретно. Лемма доказана.

5.2. Теорема. *Если τ — кардинальное число, то пространство X имеет бикомпактное расширение cX с нульмерно расположенным дискретным наростом мощности τ тогда и только тогда, когда множество $R(X)$ биокомпактно и существует π-бикомпактная база $\mathscr{B}$ пространства X, такая, что* $\mathrm{qc}(\mathscr{B}') = \tau$ *и любой максимальный идеал в $(\mathscr{B}'/\rho, \leqq)$ является главным идеалом.*

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из теоремы 1.10 и лемм 1.27 и 5.1, так как если $\mathscr{B}$ — π-бикомпактная база, то семейство $\mathscr{B}'$ квазизамкнуто относительно взятия конечных пересечений и $(\mathscr{B}')^0 = \mathscr{B}'$. Теорема доказана.

5.3. Теорема. *Пространство X имеет бикомпактное расширение cX с дискретным и счетным наростом тогда и только тогда, когда множество $R(X)$ бикомпактно и существует π-бикомпактная база $\mathscr{B}$ пространства X, такая, что $c(\mathscr{B}') \leqq \aleph_0$ и любой максимальный идеал в $(\mathscr{B}'/\rho, \leqq)$ является главным. Кроме того, $|cX \setminus X| = c(\mathscr{B}')$.*

Доказательство. Известно [13], что если нарост счетен, то он непременно нульмерно расположен. Следовательно, если мы докажем, что из $\mathrm{qc}(\mathscr{B}') \leqq \aleph_0$ следует, что $\mathrm{qc}(\mathscr{B}') = \mathrm{c}(\mathscr{B}')$, то все будет следовать из теоремы 5.2.

Итак, пусть $\mathscr{B}$ — π-бикомпактная база пространства X и $\mathrm{qc}(\mathscr{B}') = \tau \leqq \aleph_0$. Очевидно, для любого семейства $\mathscr{A}$, $\mathrm{qc}(\mathscr{A}) \geqq c(\mathscr{A})$, так как любое дизъюнктное семейство множеств квазидизъюнктно. Следовательно, мы должны доказать только неравенство $\mathrm{qc}(\mathscr{B}') \leqq c(\mathscr{B}')$. Пусть $\Omega = \{U_\alpha \in \mathscr{B}' : \alpha < \alpha_0\}$ — квазидизъюнктное семейство множеств и $\alpha_0 \leqq \omega_0$. Пусть $V_1 = U_1$, $V_2 = U_2 \setminus \mathrm{cl}(V_1 \cap U_2), \ldots, V_n = U_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} \mathrm{cl}(V_j \cap U_n), \ldots;\ n < \alpha_0$. Так как $\mathscr{B}$ — π-бикомпактная база, то полученные множества V_n снова являются элементами базы $\mathscr{B}$. Кроме того, из квазидизъюнктности семейства Ω и из того, что $\Omega \subset \mathscr{B}' \subset \mathscr{B}^0$, следует, что для любого $n < \alpha_0$, $V_n \in \mathscr{B}^0$ и, значит, $V_n \neq \emptyset$. Следовательно, так как $V_n \subset U_n$, то $V_n \in \mathscr{B}'$. Итак, мы получили новое семейство $\Omega_1 = \{V_\alpha \in \mathscr{B}' : \alpha < \alpha_0\}$. Очевидно оно дизъюнктно и $|\Omega_1| = |\Omega|$. Следовательно, $\mathrm{qc}(\mathscr{B}') \leqq c(\mathscr{B}')$, т. е. $\mathrm{qc}(\mathscr{B}') = c(\mathscr{B}')$. Теорема доказана.

5.4. Из теоремы 5.3 сразу получаем такое следствие:

Следствие. *Нарост $\Phi X \setminus X$ счетен и дискретен тогда и только когда, когда множество $R(X)$ бикомпактно, $c(\Pi') \leqq \aleph_0$ и любой максимальный идеал в $(\Pi'/\rho, \leqq)$ является главным идеалом. Кроме того,* $|\Phi X \setminus X| = \mathrm{c}(\Pi')$.

5.5. Замечание. Отметим, наконец, что доказанная выше теорема 5.2 является обобщением теоремы Магилля из [10], где дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы данное локально бикомпактное пространство X имело бикомпактное расширение cX с наростом, состоящим из

n точек, где n — наперед заданное натуральное число (и, значит, нарост дискретен). Условия теоремы Магилля можно легко получить, если, например, в теореме 5.3 взять $c(\mathscr{B}')=n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров, В. И. Пономарев. О бикомпактных расширениях топологических пространств. *Вестник МГУ, сер. матем.*, 1959, №5, 93—108.
2. П. С. Александров, П. С. Урысон. Мемуар о компактных топологических пространствах. Москва, 1971.
3. А. В. Архангельский, В. И. Пономарев. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. Москва, 1974.
4. Г. Д. Димов. О некоторых специальных бикомпактных расширениях периферически бикомпактных пространств. *Доклады БАН*, **30**, 1977, 483—486.
5. Г. Д. Димов. Бикомпактные расширения с дискретным наростом. *Доклады БАН*, **30**, 1977, 797—800.
6. Е. Г. Скляренко. Некоторые вопросы теории бикомпактных расширений. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **26**, 1962, 427—452.
7. Ю. М. Смирнов. О пространствах близости. *Матем. сб.*, **31**, 1952, 543—576.
8. H. Freudenthal. Kompaktisierungen und Bikompaktisierungen. *Indag. Math.*, **13**, 1951, 184—192.
9. M. Henriksen, J. R. Isbell. Some properties of compactifications. *Duke Math. J.*, **25**, 1958, 83—106.
10. K. D. Magill. *N*-point compactifications. *Amer. Math. Monthly*, **72**, 1965, 1075-1081.
11. K. Morita. On bicompactifications of semibicompact spaces. *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A*. **4**, 1952, 200—207.
12. M. C. Rayburn. On Hausdorff compactifications. *Pacific. J. Math.*, **44**, 1973, 707—714
13. A. K. Steiner, E. F. Steiner. Wallman and *Z*-compactifications. *Duke Math. J.*. **35** 1968, 269—276.
14. R. C. Walker. The Stone—Čech compactification. Berlin, 1974.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 9. 1. 1979