PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

RÄUMLICH HOMOGENE KRITISCHE BELLMAN-HARRIS-PROZESSE

GEORGI S. TSCHOBANOW

Die vorliegende Arbeit ist eine unmittelbare Fortsetzung der Arbeit „Räumlich homogene kritische Verzweigungsprozesse mit beliebigem Markenraum" des Autors (in diesem Band) deren Kenntnis hier vorausgesetzt wird. Sie verallgemeinert die Ausführungen von Debes, Kerstan, Liemant, Matthes (1970), wobei der bekannte Begriff des Bellman-Harris-Prozesses zum Ausgangspunkt genommen wird.

0. Einleitung. Wir nehmen an, die Teilchen eines lokalendlichen Teilchensystems seien durch eine nichtnegative reelle Zahl markiert, die wir als Alter deuten. Neben der Schauerverteilung V, die als kritisch vorausgesetzt wird, ist noch die Verteilungsfunktion F der Lebenszeiten der einzelnen Teilchen gegeben, und zwar werden alle Teilchen mit dem Alter Null geboren, altern entsprechend dem Verlauf der kontinuierlichen Zeit und sterben unabhängig voneinander gemäß der durch F beschriebenen Lebensverteilung. Der Tod eines Teilchens löst dann einen Schauer von Tochterteilchen aus, wobei sich die Orte der Teilchen im Verlaufe ihrer Lebenszeit nicht verändern.

Wir nehmen an, die Verteilungsfunktion F sei absolut stetig, der Erwartungswert $\Delta_F=\int_0^\infty x dF(x)$ der Lebenszeit sei endlich und die Schauerverteilung V sei kritisch sowie nichtgitterförmig. Unter diesen Annahmen werden die Aussagen aus [6] auf das räumlich homogene kritische Bellman-Harris-Modell übertragen. Die Forderung nach absoluter Stetigkeit der Verteilungsfunktion F erklärt sich daraus, daß in [9] eine recht scharfe Version der schwachen asymptotischen Gleichverteilung benutzt wurde.

1. Kritische räumlich homogene Verzweigungshalbgruppen. Unter einer kritischen räumlich homogenen Verzweigungshalbgruppe verstehen wir eine Abbildung $l \rightarrow \mathbf{D}_{(.)}^{\langle l\rangle}$ von $[0, +\infty)$ in $\mathbf{D}$ mit folgenden Eigenschaften:

g_1) Die Abbildung $[l, k] \rightarrow D_{(k)}^{\langle l\rangle}$ von $[0, +\infty]\times K$ in $\mathbf{P}$ ist schwach stetig.

g_2) Für alle $l, t\geqq 0$ und alle k in K gilt $(D_{(k)}^{\langle t\rangle})[D^{\langle l\rangle}]=D_k^{\langle t+l\rangle}$.

g_3) Für alle k in K ist $D_{(k)}^{\langle 0\rangle}=\delta(\delta([[0, \ldots, 0]. k]))$.

Unmittelbar aus g_2) ergibt sich

1.1. *Für alle $l\geqq 0$ und alle natürlichen Zahlen n gilt* $D_{(.)}^{\langle nl\rangle}=(D^{\langle l\rangle})_{(.)}^{[n]}$.

Das folgende Beispiel zeigt, daß g_3) nicht aus g_1) und g_2) hergeleitet werden kann.

Es sei $[K, \rho_K]$ die kompakte Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag Eins und die Multiplikation als Gruppenoperation und σ die Gleichverteilung auf dieser Gruppe. Für alle $t\geqq 0$ und alle k aus K setzen wir $D_{(k)}^{\langle t\rangle}=\int\delta([[0, \ldots, 0], g], (.))\sigma(dg)$ an. Offenbar ist dann stets $(D_{(k)}^{\langle t\rangle})[D^{\langle l\rangle}]=D_{(k)}^{\langle t\rangle}=D_{(k)}^{\langle t+l\rangle}$. Somit ist g_2) erfüllt. Trivialerweise gilt auch g_1). Andererseits ist aber g_3) verletzt.

Unmittelbar aus g_2) ergibt sich für alle $l, t \geqq 0$ die Beziehung $\omega_{D^{\langle t+l\rangle}_{(\cdot)}} = \omega_{D^{\langle l\rangle}_{(\cdot)}} * \omega_{D^{\langle t\rangle}_{(\cdot)}}$.

Weiterhin gilt

1.2. *Die Abbildung* $[l, k] \to \Lambda(D^{\langle l\rangle}_{(k)}) = \omega(D^{\langle l\rangle}_{(\cdot)})^+$ *von* $[0, +\infty) \times K$ *in die Menge aller Verteilungsgesetze auf* $\mathfrak{A}$ *ist schwach stetig.*

Beweis. Es gelte $[l_n, k_n] \to [l, k]$, $n \to \infty$.

Vermöge Satz 3.1.12. aus [8] erhalten wir wegen g_1) für alle X aus $\mathfrak{B}_{D^{\langle l\rangle}_{(k)}}$

$$(*) \qquad \Lambda(D^{\langle l\rangle}_{(k)}, X)^{(k)} \leqq \liminf_{n\to\infty} \Lambda(D^{\langle l_n\rangle}_{(k_n)}, X).$$

Es sei nun Y irgendeine der Bedingung $\Lambda(D^{\langle l\rangle}_{(k)}, \partial Y) = 0$ genügende Menge aus. $\mathfrak{A}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert in $\mathfrak{B}_{D^{\langle l\rangle}_{(k)}}$ eine Menge X_ε mit den Eigenschaften

$$\Lambda(D^{\langle l\rangle}_{(k)}, \partial X_\varepsilon) = 0, \quad \Lambda(D^{\langle l\rangle}_{(k)}, X_\varepsilon) \geqq 1 - \varepsilon.$$

Vermöge $(*)$ erhalten wir

$$\Lambda(D^{\langle l\rangle}_{(k)}, Y) - \varepsilon \leqq \Lambda(D^{\langle l\rangle}_{(k)}, Y \cap X_\varepsilon)$$
$$\leqq \liminf_{n\to\infty} \Lambda(D^{\langle l_n\rangle}_{(k_n)}, Y \cap X_\varepsilon) \leqq \liminf_{n\to\infty} \Lambda(D^{\langle l_n\rangle}_{(k_n)}, Y)$$

und damit

$$(**) \qquad \Lambda(D^{\langle l\rangle}_{(k)}, Y) \leqq \liminf_{n\to\infty} \Lambda(D^{\langle l_n\rangle}_{(k_n)}, Y).$$

Durch Übergang zum Komplement geht $(**)$ in

$$(***) \qquad \Lambda(D)^{\langle l\rangle}_{(k)}, Y) \geqq \limsup_{n\to\infty} \Lambda(D)^{\langle l_n\rangle}_{(k_n)}, Y) \quad \text{über.}$$

Damit erhalten wir für alle der Bedingung $\Lambda(D^{\langle l\rangle}_{(k)}, \partial Y) = 0$ genügenden Y in $\mathfrak{A}$ die Konvergenz $\Lambda(D^{\langle l_n\rangle}_{(k_n)}, Y) \to \Lambda(D^{\langle l\rangle}_{(k)}, Y)$ d. h. es gilt $\Lambda(D^{\langle l_n\rangle}_{(k_n)}) \Rightarrow \Lambda(D^{\langle l\rangle}_{(k)})$. Im folgenden benötigen wir das Lemma

1.3. *Es sei* (P_n) *eine gegen* P *schwach strebende Folge von Verteilungsgesetzen auf* $\mathfrak{M}$, *für die ein endliches Maß* τ *auf* $\mathfrak{R}$ *mit der Eigenschaft* $\Delta(P_n) \leqq \mu \otimes \tau$ $(n = 1, 2, \dots)$ *existiert. Unter diesen Annahmen kann aus* $l_n \to l$ *auf* $(P_n)[D^{\langle l_n\rangle}] \Rightarrow P[D]$ *geschlossen werden.*

Beweis. 1. In $[A, \rho_A]$ bzw. $[0, +\infty)$ gelte $[x_n, k_n] \to [x, k]$ bzw. $l_n \to l$. Vermöge g_1) ergibt sich $D^{\langle l_n\rangle}_{(k_n)} \Rightarrow D^{\langle l\rangle}_{(k)}$, $n \to \infty$. Beachtet man nun, daß die Abbildung $[y, \Phi] \to T_y\Phi$ von $R^s \times M$ in M bezüglich der vagen Topologie in M stetig ist, so ergibt sich mit Hilfe von Theorem 5.5. in [1]

$$[D^{\langle l_n\rangle}]_{([x_n, k_n])} = [D^{\langle l_n\rangle}_{(k_n)}]_{(x_n)} = (D^{\langle l_n\rangle}_{(k_n)})(T_{x_n}\chi \in (\cdot)) \Rightarrow D^{\langle l\rangle}_{(k)}(T_x\chi \in (\cdot)) = [D^{\langle l\rangle}]_{([x, l])}$$

2. Auf Grund eines Stetigkeitssatzes von Fleischmann (vgl. [3], oder [5]) kann wegen 1 aus $P_n \Rightarrow P$, $n \to \infty$ auf $(P_n)[D^{\langle l_n\rangle}] \Rightarrow P[D^{\langle l\rangle}]$, $n \to \infty$ geschlossen werden, wenn

$$(\circ) \qquad \inf_{X \in \mathfrak{B}} \sup_{n=1,2,\ldots} \int_{A \setminus X} [D^{\langle l_n \rangle}]_{(a)}(\chi(X_0)>0)\Lambda(P_n, da), \quad (X_0 \in \mathfrak{B})$$

d. h. wenn

$$\inf_{X \in \mathfrak{B}^x} \sup_{n=1,2,\ldots} \int_{A \setminus (X*K)} (D^{\langle l_n \rangle}_{(k)})^x(\chi(X_0-x)>0)\Lambda(P_n, (d[x, k])) = 0 \quad (x_0 \in \mathfrak{B}^x)$$

erfüllt ist.

Voraussetzungsgemäß gilt für alle X. $X_0 \in \mathfrak{B}^x$

$$\int_{A \setminus (X \times K)} (D^{\langle l_n \rangle}_{(k)})^x(\chi(X_0-x)>0)\Lambda(P_n, (d[x, k])$$
$$\leqq \int_{R^s \setminus X} (\int (D^{\langle l_n \rangle}_{(k)})^x(\chi(X_0-x)>0)\tau(dk))\mu(dx)$$
$$\leqq \int_{R^s \setminus X} (\int \Lambda(D^{\langle l_n \rangle}_{(k)})^x, X_0-x)\tau(dk))\mu(dx).$$

Vermöge 1.2 gilt

$$(\int \Lambda(D^{\langle l_n \rangle}_{(k)}, (.))\tau(dk))^x \Rightarrow (\int \Lambda(D^{\langle l \rangle}_{(k)}, (.))\tau(dk))^x.$$

Somit ist die Menge $\{(\int D^{\langle l_n \rangle}_{(k)}(.)\tau(dk))^x, \; n=1, 2, \ldots\}$ relativ kompakt be züglich der schwachen Topologie in der Menge aller endlichen Maße auf $\mathfrak{R}^s$ Folglich existiert zu jedem $\varepsilon>0$ eine kompakte Teilmenge B_ε von R^s mit der Eigenschaft

$$\sup_{n=1,2,\ldots} \int \Lambda(D^{\langle l_n \rangle}_{(k)}, R^s \setminus B_\varepsilon)\tau(dk) \leqq \varepsilon.$$

Wir erhalten somit

$$\inf_{X \in \mathfrak{B}^x} \sup_{n=1,2,\ldots} \int_{R^s \setminus X} (\int \Lambda((D^{\langle l_n \rangle}_{(k)})^x. \; X_0-x)\tau(dk))\mu(dx)$$
$$\leqq \inf_{X \in \mathfrak{B}^x} \sup_{h=1,2,\ldots} \int_{R^s \setminus X} (\int \Lambda((D^{\langle l_n \rangle}_{(k)})^x, \; ((X_0-x) \cap B_\varepsilon)\tau(dk))\mu(dx)$$
$$+ \sup_{n=1,2,\ldots} \int (\int \Lambda((D^{\langle l_n \rangle}_{(k)})^x, \; ((X_0-x) \setminus B_\varepsilon)\tau(dk))\mu(dx)$$
$$= \sup_{n=1,2,\ldots} \int \mu(X_0-x)(\int \Lambda(D^{\langle l_n \rangle}_{(k)}, (.))\tau(dk))((dx) \setminus B_\varepsilon) \leqq \varepsilon\mu(X_0).$$

Somit ist die Bedingung (θ) erfüllt.

Eine Analyse des Beweises von [7, 1.4] zeigt, daß die benutzten Schlüsse auch im Fall kontinuierlicher Zeit gültig sind. Als Gegenstück von [9, 6.1] erhalten wir somit

1.4. *Ist τ irgendein endliches Maß auf $\mathfrak{R}$ mit der Eigenschaft $p(\omega_{D^{\langle l \rangle}}) * \tau = \tau$ $(l \geqq 0)$ so existiert ein stationäres unbegrenzt teilbares Verteilungsgesetz $V_{\mu\otimes\tau}$ auf $\mathfrak{M}$ mit den Eigenschaften*

$$(V_{\mu\otimes\tau})[D^{\langle l \rangle}] = V_{\mu\otimes\tau}, \quad (l \geqq 0), \quad \Lambda(V_{\mu\otimes\tau}) \leqq \mu \otimes \tau, \quad (P_{\mu\otimes\tau})[D^{\langle l \rangle}] \underset{l \to \infty}{\Longrightarrow} V_{\mu\otimes\tau}$$

Auf die gleiche Weise ergibt sich als Gegenstück zu [9, 6.3] die Aussage

1.5. *Unter der Voraussetzung von 1.4. existiert genau dann ein stationäres Verteilungsgesetz P auf $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft $P[D^{\langle l\rangle}]=P$ für alle $l\geq 0$, $\Lambda(P)=\mu\otimes\tau$ wenn $(P_{\mu\otimes\tau})[D^{\langle l\rangle}]$ für $l\to\infty$ schwach gegen ein Verteilungsgesetz $]D^{\langle\cdot\rangle}, \mu\otimes\tau[$ auf $\mathfrak{M}$ und dem Intensitätsmaß $\mu\otimes\tau$ konvergiert. Dieses Verteilungsgesetz $]D^{\langle\cdot\rangle}, \mu\otimes\tau[$ ist stationär, unbegrenzt teilbar und schauerinvariant bezüglich alle $D^{\langle l\rangle}$, $l\geq 0$.*

Offenbar ist für alle k in K, die für alle $l\geq 0$ definierte Überlebenswahrscheinlichkeit $z_{l,k}=D^{\langle l\rangle}_{(k)}(\chi\neq 0)$ monoton fallend in l.

Wir sagen, $D^{\langle\cdot\rangle}$ genüge der Bedingung d_1), falls für alle k in K die Konvergenz $z_{l,k}\to 0$, $l\to\infty$ stattfindet.

Weiterhin sagen wir $D^{\langle\cdot\rangle}$ erfüllt die Bedingung d_3), falls ein Verteilungsgesetz τ auf $\mathfrak{R}$ mit der Eigenschaft $p(\omega_{D^{\langle l\rangle}})*\tau=\tau$, $(l\geq 0)$ existiert. Ist dieses τ eindeutig bestimmt, so bezeichnen wir es mit $\tau_{D^{\langle\cdot\rangle}}$. In diesem Fall heißt die Halbgruppe $D^{\langle\cdot\rangle}$ stabil, falls $]D^{\langle\cdot\rangle}, \mu\otimes\tau[$ existiert. Wir schreiben dann $]D^{\langle\cdot\rangle}, \mu\otimes\tau[\ =\ ]D^{\langle\cdot\rangle}[$ woraus sich wiederum für alle $t\geq 0$ $]D^{\langle\cdot\rangle}, \mu\otimes t\tau[\ =\ ]D^{\langle\cdot\rangle}[^t$ ergibt.

Wir sagen $D^{\langle\cdot\rangle}$ erfüllt die Bedingung (sieh [9]) d_2), falls für alle $l>0$ die Familie $D^{\langle l\rangle}_{(\cdot)}$ dieser Bedingung genügt. Erfüllt also $D^{\langle\cdot\rangle}$ die beiden Bedingungen d_2) und d_3), so ist τ eindeutig bestimmt, und für alle $l>0$ genügt $D^{\langle l\rangle}_{(\cdot)}$ den Bedingungen d_2), d_3) und d_4).

In diesem Falle ist $D^{\langle\cdot\rangle}$ genau dann stabil, wenn das für $D^{\langle l\rangle}_{(\cdot)}$ zutrifft und es gilt $]D^{\langle l\rangle}[\ =\ ]D^{\langle\cdot\rangle}[$.

Unmittelbar aus 6.8 in [9] ergibt sich nun

1.6. Theorem. *Genügt $D^{\langle\cdot\rangle}$ den Bedingungen d_1), d_2), d_3), d_4) und ist $D^{\langle\cdot\rangle}$ außerdem stabil, so vermittelt $\sigma\to\int]D^{\langle\cdot\rangle}[^l(\,.\,)\sigma(dl)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge aller Verteilungsgesetze σ zufälliger nichtnegativer Zahlen auf die Menge der stationären bezüglich aller $D^{\langle l\rangle}$, $l\geq 0$, schauerinvarianten Verteilungsgesetze auf $\mathfrak{M}$.*

Gestützt auf [9, 6.7] ergibt sich

1.7. Theorem. *Unter den Voraussetzungen von 1.6 gilt für alle L aus S und alle endlichen Folgen $X_1,\ldots, X_m$ von Mengen aus $\mathcal{L}$*

$$\sup_{x\in R^s} \| \mathrm{L}[D^{\langle u\rangle}]-\int]D^{\langle\cdot\rangle}[^l(\,.\,)\sigma_L(dl)\|_{X_1+x,\ldots,X_m+x}\xrightarrow[u\to\infty]{} 0.$$

Beweis. 1. Da D voraussetzungsgemäß den Bedingungen d_1), d_2), d_3), d_4) genügt und stabil ist, so trifft dies auch für $V=D^{\langle 1\rangle}$ zu. Vermöge [9, 1.1 und Theorem 6.7] erhalten wir somit

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R^s}\|\mathrm{L}[D^{\langle n\rangle}]-P\|_{X_1+x,\ldots,X_m+x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R^s}\|\mathrm{L}[V^{[n]}]-P\|_{X_1+x,\ldots,X_m+x},$$

wobei $P=\int]V[^l(\,.\,)\sigma_L(dl)=\int]D^{\langle\cdot\rangle}[^l(\,.\,)\sigma_L(dl)$ gesetzt wurde.

2. Es sei τ irgendein endliches Maß auf $\mathfrak{R}$ mit der Eigenschaft $\Lambda(L)\leq\mu\otimes\tau$.

Mit Hilfe von [9, 1.1 und 1.2] erhalten wir nun für alle beschränkten X aus $\mathfrak{R}^s$ und alle Z aus $\mathfrak{R}$ für $n=1, 2,\ldots$

$$\Lambda(L[V^{[n]}]) = \int(\omega_V)^{[n]}(a, X\times Z)(\Lambda[L])(da) \leqq (\omega_V^{[n]} * (\mu\otimes\tau))(X\times Z)$$
$$= \mu(X)((p(\omega_V))^{[n]} * \tau)(Z) \leqq \mu(X)\tau_0(Z),$$

Somit ist $\Lambda(L[V^{[n]}]) \leqq \mu\otimes\tau_0$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Es sei nun (m_k) irgendeine gegen $+\infty$ strebende Folge nichtnegativer ganzer Zahlen, (r_k) irgendeine gegen r strebende Folge von Zahlen aus $[0, 1)$ und (x_k) irgendeine Folge von Elementen aus R^s. Zur Abkürzung setzen wir $L_k = L(T_{x_k}\Phi\epsilon(.))$ $(k=1, 2, \ldots)$ an. Auf Grund von 1, Lemma 1.3 und Theorem 1.6 erhalten wir nun

$$(L_k)[D^{\langle m_k+r_k\rangle}] = ((L_k)[D^{\langle m_k\rangle}])[D^{\langle r_k\rangle}] \Rightarrow P[D^{\langle r\rangle}] = P.$$

3. Es sei t_k irgendeine gegen $+\infty$ strebende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Wir setzen $t_k = m_k + r_k$, wobei m_k den ganzen Anteil von t_k bezeichnet. Jede Teilfolge von (t_k) besitzt ihrerseits eine Teilfolge (t_{k_n}) für die (r_{k_n}) konvergiert und somit gemäß 2. die Folge $((L_k)[D^{\langle t_k\rangle}]$ schwach gegen P strebt. Somit erhalten wir

$$(L_k)[D^{\langle t_k\rangle}] \underset{k\to\infty}{\Longrightarrow} P = \int]D[^l(.)\,\rho_L(dl)$$

woraus mit der am Ende des Beweises von [9, 3.3] benutzten Methode für alle endlichen Folgen $X_1, \ldots, X_m$ von Mengen aus $\mathfrak{B}$ auf

$$\|(L_k)[D^{\langle t_k\rangle}] - P\|_{X_1, \ldots, X_m} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

geschlossen werden kann.

Beachtet man nun, daß die Folge (x_k) beliebig gewählt werden konnte so ergibt sich hieraus

$$\sup_{x\in R^s} \|L[D^{\langle t_k\rangle}] - P\|_{X_1+x, \ldots, X_m+x} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

d. h. es ist

$$\sup_{x\in R^s} \|L[D^{\langle t\rangle}] - P\|_{X_1+x, \ldots, X_m+x} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Am Ende des Abschnitts wollen wir noch einmal auf die Bedingung d_2) zurückkommen:

1.8. Satz. *Ist l irgendeine positive Zahl, so erfüllt $D^{\langle.\rangle}$ genau dann der Bedingung* d_2), *wenn dies für $D^{\langle l\rangle}_{(.)}$ zutrifft.*

Beweis. Wir wollen annehmen, die Folge der $\omega_n = \omega(D^{\langle nl\rangle})$ sei schwach asymptotisch gleichverteilt. Ist nun σ irgendein bezüglich μ absolut stetiges Verteilungsgesetz auf $\mathfrak{R}^s$, so erhalten wir für alle ω in Ω, alle a, b in A und alle natürlichen Zahlen n

$$\|(\omega * \omega_n * \sigma^l)(a, (.)) - (\omega * \omega_n * \sigma^l)(b, (.))\|$$
$$= \|\int\omega(z, (.))(\omega_n * \sigma^l)(a, dz) - \int\omega(z, (.))(\omega_n * \sigma^l)(b, dz)\|$$
$$\leqq \|(\omega_n * \sigma^l)(a, (.)) - (\omega_n * \sigma^l)(b, (.)).$$

Aus $\|(\omega_n * \sigma^l)(a, (.)) - (\omega_n * \sigma^l)(b, (.))\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ folgt somit für alle Folgen ρ_n) von Elementen aus Ω $\|((\rho_n * \omega_n) * \sigma^l)(a, (.)) - ((\rho_n * \omega_n) * \sigma^l)(b, (.))\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ Ist nun l_m irgendeine monoton wachsend gegen $+\infty$ strebende Folge positiver reeller Zahlen, so setzen wir n_m gleich dem ganzen Anteil von $l^{-1}l_m$ und erhalten

$$\|(\omega(D^{\langle l_m\rangle}) * \sigma^l)(a, (.)) - (\omega(D^{\langle l_m\rangle}) * \sigma^l)(b, (.))\|$$
$$\leqq \|(\omega_{n_m} * \sigma^l)(a, (.)) - (\omega_{n_m} * \sigma^l)(b, (.))\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Konstruktion der kritischen räumlich homogenen Verzweigungshalbgruppe $[l, t] \to D_{(t)}^{\langle l\rangle}$. Es sei F eine beliebige, aber fest gewählte stetige Verteilungsfunktion einer zufälligen positiven reellen Zahl. In Abhängigkeit von F führen wir nun folgenden Markenraum ein:

Es sei K die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen t mit der Eigenschaft $F(t) < 1$. Somit hat K stets die Gestalt $[0, c)$ mit $0 < c < +\infty$. Ist nun $c = +\infty$, so setzen wir $\rho_K(t_1, t_2) = |t_1 - t_2|/(1 + |t_1 - t_2|)$, $t_1, t_2 \in K$ und erhalten eine vollständige beschränkte Metrik in K. Andererfalls bilden wir zunächst umkehrbar eindeutig und in beiden Richtungen stetig auf $[0, +\infty)$ ab und benutzen dann die obige Metrik. Wir deuten die Marke t eines markierten Punktes in A als dessen Alter.

Zur Abkürzung setzen wir für alle t aus K und alle $s \geqq 0$

$$F_t(s) = [f(s+t) - F(t)]/[1 - F(t)] \quad \text{an.}$$

Es bezeichne weiterhin V ein beliebiges aber fest gewähltes Verteilungsgesetz auf $\mathfrak{M}^x$ mit der Eigenschaft $\int \chi(R^s) V(d\chi) = 1$. Vermöge $W = V(\chi\delta(0) \in (.))$ erhalten wir dann ein Verteilungsgesetz auf $\mathfrak{M}$.

Bei der Einführung der kritischen räumlich homogenen Verzweigungshalbgruppe $D^{\langle . \rangle}$ lassen wir uns von folgender Vorstellung leiten: Es sei t irgendein Punkt aus K. Wir starten zum Zeitpunkt $l = 0$ mit einem Teilchen im Nullpunkt $[0, \ldots, 0]$ des Ortsraumes R^s mit dem Alter t. Bis zum Ablauf der gemäß F_t verteilten zufälligen restlichen Lebenszeit ξ des Teilchens ruht es im Nullpunkt, wobei sich das Alter gemäß der natürlichen Zeitskala vergrößert. Zum Zeitpunkt ξ — tritt ein Sprung ein, bei dem das ursprüngliche Teilchen stirbt und einen gemäß W verteilten zufälligen Schauer χ von Punkten auslöst, welche sämtlich das Alter Null besitzen. Vom Zeitpunkt ξ an entwickeln sich nun alle Teilchen $[x, 0]$ aus χ unabhängig voneinander, insbesondere wird für jedes von ihnen eine gemäß F verteilte zufällige Lebenszeit ausgewürfelt, nach deren Ablauf dann ein gemäß $[W]_{(x)}$ verteilter zufälliger Schauer ausgelöst wird usw. Auf diesem Weg entsteht in jedem Zeitpunkt $l \geqq 0$ eine zufällige endliche Population von markierten Teilchen, deren Verteilungsgesetze wir mit $D_{(t)}^{\langle l\rangle}$ bezeichnen. Die eben skizzierte inhaltliche Einführung der Verteilungsgesetze $D_{(t)}^{\langle l\rangle}$ läßt erwarten, daß für alle $l \geqq 0$ und alle t aus K die folgende Integralgleichung gilt:

$$\otimes D_{(t)}^{\langle l\rangle}(.) = (1 - F_t(l))\delta(\delta([[0, \ldots, 0], l+t]), (.)) + \int_0^l (W[D_{(0)}^{\langle l-v\rangle}])(.) dF_t(v).$$

Diese Integralgleichung hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn für jedes t aus K die Abbildung $l \to D_{(t)}^{(l)}$ von $[0, \infty)$ in $\mathbb{P}$ bezüglich der σ-Algebra $\mathfrak{P}$ meßbar ist. Mit Hilfe von $\otimes$ läßt sich die Familie $(D_{(t)}^{(\cdot)}, t \in K)$ aus $\mathbb{D}$ mit den üblichen Methoden exakt einführen:

2.1. Satz. *Es gibt genau eine Familie* $(D_{(t)}^{(\cdot)}, t \in K)$ *von meßbaren Abbildungen von* $[0, +\infty)$ *in die Menge aller der Bedingung* P (χ *ist endlich*) $=1$ *genügenden Verteilungsgesetze* P *auf* $\mathfrak{M}$, *die der Gleichung* $\otimes$ *genügt. Diese Familie ist eine kritische räumlich homogene Verzweigungshalbgruppe.*

Beweis. 1. Es seien $(f_t(.), t \in K)$, $(g_t(.), t \in K)$ zwei Familien meßbarer Abbildungen von $[0, +\infty)$ in die Menge aller der Bedingung $P(\chi$ ist endlich$)$ $=1$ genügenden P aus $\mathbb{P}$, die beide der Integralgleichung $\otimes$ genügen. Vermöge [8, 1.9.3] ist dann für alle $t \in K$ die auf R definierte reele Funktion

$$u \to v_t(u) = \begin{cases} \| f_t(u) - g_t(u) \| & \text{für} \quad u \geqq 0, \\ 0 & \text{für} \quad u < 0, \end{cases}$$

meßbar. Mit Hilfe der Abschätzung 4.2.7 aus [8] erhalten wir nun für alle $u \geqq 0$ und alle t aus K

$$v_t(u) = \| \int_0^u (W[f_0(u-v)])(.)dF_t(v) - \int_0^u (W[g_0(n-v)])(.)dF_t(v) \|$$

$$\leqq \int_0^u \| W[f_0(u-v)] - W[g(u-v)] \| dF_t(v)$$

$$\leqq \int_0^u (\int \| [f_0(u-v)] - [g_0(u-v)] \| \Lambda(W, (da))) dF_t(v)$$

$$= \int_0^u \| f_0(u-v) - g_0(u-v) \| dF_t(v) = (v_0 * F_t)(u).$$

Für alle natürlichen Zahlen n, alle $u \geqq 0$ und alle t in K erhalten wir somit $v_t(u) \leqq (v_0 * F^{*n} * F_t)(u)$ d. h. es ist $v_t(u) = 0$. Somit fallen die beiden Funktionen $(f_t(.), t \in K)$, $(g_t(.), t \in K)$ zusammen.

2. Wir zeigen nun durch vollständige Induktion nach n, daß der Ansatz

$$f_t(u, 0) = \delta(\delta([[0, \ldots, 0], t+u])), \quad t \in K, \quad u \geqq 0;$$

$$f_t(u, n+1) = (1 - F_t(u))\delta(\delta([[0, \ldots, 0], t+u])) + \int_0^u (W[f_0(u-v, n)])(.)dF(v),$$

$$t \in K, \quad u \geqq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

für alle nichtnegativen ganzen n eine Familie $(f_t((.), n), t \in K)$ schwach stetiger und damit meßbarer Abbildungen von $[0, +\infty)$ in $\mathbb{P}$ mit der Eigenschaft $\int \chi(A)(f_t(u, n))(d\chi) = 1$, $t \in K$, $u \geqq 0$, $n = 0, 1, \ldots$, liefert.

Diese Aussage gilt trivialerweise im Fall $n = 0$. Wir wollen nun annehmen, es sei für alle nichtnegativen ganzen $m \leqq n$ gültig. Die obige Rekursionsformel definiert dann eine Familie $(f_t(.), n+1), t \in K)$ von Abbildungen von $[0, +\infty)$ in $\mathbb{P}$. Gestützt auf die Formel 4.2.2 aus [8] erhalten wir für alle t aus K und alle $u \geqq 0$

$$\Lambda(f_t(u,\ n+1),\ A)=(1-F_t(u))+\int_0^u \Lambda(W[f_0(u-v,\ n)],\ A)dF_t(v)=(1-F_t(u))$$

$$+\int_0^u (\int \Lambda([f_0(u-v,\ n)],\ A)\Lambda(W,\ (da)))dF_t(v)=1-F_t(u)+\int 1dF_t(v)=1.$$

Offenbar ist für alle t in K die Abbildung $u\to(1-F_t(u))\delta(\delta([[0,\ldots,0],\ t+u]))$ von $[0,+\infty)$ in die Menge aller endlichen Maße auf $\mathfrak{M}$ schwach stetig. Es bleibt somit nur noch zu zeigen, daß dies auch für

$$u\longrightarrow S_{u,t}=\int_0^u (W[f_0(u-v,\ n)])(\,.\,)dF_t(v)$$

zutrifft.

Es gelte also $u_m\to u,\ m\to\infty$. Auf Grund eines Stetigkeitssatzes von Fleischmann (vgl. [3] oder [7]) ergibt sich hieraus mit Hilfe der Induktionsannahme für alle v aus $[0,u)$ die Konvergenz $W[f_0(u_m-v,\ n)]\Rightarrow W[f_0(u-v,n]$, $m\to\infty$. Hieraus folgt aber sofort für alle bezüglich der vagen Topologie stetigen beschränkten reellen Funktionen h auf M und alle $\varepsilon>0$

$$\limsup_{m\to\infty} \left| \int h(\chi)S_{u_m,t}(d\chi)-\int h(\chi)S_{u,t}(d\chi)\right|$$

$$\leqq \limsup_{m\to\infty} \left| \int_0^{\max(0,\,u-\varepsilon)} (\int h(\chi)(W[f_0(u_m-v,\ n)])(d\chi))dF_t(v)\right.$$

$$\left. - \int_0^{\max(0,\,u-\varepsilon)} (\int h(\chi)(W[f_0(u-v,\ n)])(d\chi)dF_t(v)\right|$$

$$+\limsup_{m\to\infty} \Big(\int_{\max(0,\,u-\varepsilon)}^{u+\varepsilon} (\int |h(\chi)|(W[f_0(u_m-v,\ n)])(d\chi))dF_t(v)$$

$$+\int_{\max(0,\,u-\varepsilon)}^{u+\varepsilon} (\int |h(\chi)|(W[f_0(u-v,\ n)])(d\chi))dF_t(v)$$

$$\leqq 0+2\sup_{\chi\in M}|h(\chi)|(F_t(u+\varepsilon)-F_t(u-\varepsilon)).$$

Somit gilt $\int h(\chi)S_{u_m,t}(d\chi)\xrightarrow[m\to\infty]{}\int h(\chi)S_{u,t}(d\chi)$ d. h. es ist $S_{u_m,t}\Rightarrow S_{u,t},\ m\to\infty$.

3. Wir zeigen durch vollständige Induktion nach n, daß für alle $t\in K$, alle $n\geqq 0$ und alle natürlichen Zahlen n die folgende Ungleichung gilt: $\|f_t(u,\ n)-f_t(u,\ n-1)\|\leqq 2(F_t * F^{*(n-1)})(u)$. Für $n=1$ erhalten wir zunächst einmal

$$\|f_t(u,\ 1)-f_t(u,\ 0)\|=\|\delta(\delta([[0,\ldots,0],\ t+u]))$$

$$-(1-F_t(u))\delta(\delta[[0,\ldots,0],\ t+u])+\int_0^u (W[\delta(\delta[[0,\ldots,0]\ t+u])])(\,.\,)dF_t(v)\|$$

$$\leqq F_t(u)+\left\|\int_0^u (W[\delta(\delta[[0,\ldots,0],\ t+u])])(\,.\,)dF_t(v)=2F_t(u).\right.$$

Wir wollen nun annehmen, die obige Ungleichung sei für $n=1,\ldots, m$, alle $t\in K$ und alle $u\geqq 0$ gültig. Mit Hilfe der Abschätzung 4.2.7 aus [8] ergibt sich nun für alle m

$$\| f_t(u, m+1)-f_t(u, m)\|$$

$$\leqq \int_0^u \| W[f_0(u-v, m)]-W[f_0(u-v, m-1)]\| dF_t(v)$$

$$\leqq \int_0^u (\int \| [f_0(u-v, m]_{(a)}-[f_0(u-v, m-1]_{(a)} \| \Lambda(W, (da)))dF_t(v)$$

$$=\int_0^u \| f_0(u-v, m)-f_0(u-v, m-1)\| dF_t(v)\geqq \int_0^u F^{(*m)}(u-v)dF_t(v)=2(F_t * F^{*m})(u).$$

4. Auf Grund von 3. erhalten wir für alle natürlichen Zahlen k, alle nichtnegativen ganzen Zahlen n, sowie alle $t\in K$ $u\geqq 0$,

$$\| f_t(u, n+k)-f_t(u, n)\| \leqq 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} F^{(*i)}(u).$$

Da die rechts stehende Reihe bekanntlich für alle $u\geqq 0$ konvergiert, erkennen wir somit, daß $f_t((.), n)$ bezüglich des Variationsabstandes in **P** gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $[0, +\infty)$ gegen einen Grenzwert $f_t(.)$ strebt. Zusammen mit den $f_t((.), n)$ ist dann auch der Limes $f_t(.)$ auf $[0, +\infty)$ schwach stetig.

Aus $\Lambda(f_t((.), n), A)=1$, $n=1, 2, \ldots$, folgt $\Lambda(f, A)\leqq 1$. Für alle $t\in K$ und alle $u\geqq 0$ erhalten wir nun

$$\| f_t(u)-(1-F_t(u))\delta(\delta([[0,\ldots, 0], t+u]))-\int_0^u W[f_0(u-v)]dF_t(v)\|$$

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \| \int_0^u (W[f_0(u-v)])(.)dF_t(v)-\int_0^u (W[f_0(u-v, n)])(.)dF_t(v)\|$$

$$\leqq \limsup_{n\to\infty} \int_0^u \| f_0(u-v)-f_0(u-v, n)\| dF_t(u)=0$$

d. h. die Familie $(f_t(.), t\in K)$ genügt der Gleichung $(\otimes)$.

5. Für alle t in K und alle $u\geqq 0$ setzen wir $a_t(u)=\int \chi(A)(f_t(u))(d\chi)$ an. Da $(f_t(.), t\in K)$ der Gleichung $\otimes$ genügt, erhalten wir für alle $t\in K$, $u\geqq 0$

$$a_t(u)=1-F_t(u)+\int_0^u a_0(u-v)dF_t(v).$$

Wir erhalten

$$| a_t(u)-1| = | \int_0^u a_0(u-v)dF_t(v)-\int_0^u 1dF_t(v)|$$

$$\leqq \int_0^u | a_0(u-v)-1| dF_t(v)=(| a_0(.)-1| * F_t)(u).$$

Für alle natürlichen Zahlen n können wir somit auf $|a_t(u)-1|\leqq(|a_0(.)-1|*F_t^{*n})(u)$ schließen, d. h. es gilt:

6. Vermöge 1.—5. existiert genau eine Familie $(f_t(.), t\in K)$ meßbarer Abbildungen von $[0, +\infty)$ in die Menge aller Verteilungsgesetze P auf $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft $P(\chi$ endlich$)=1$, die der Integralgleichung $\otimes$ genügt, wobei

$$\int\chi(A)(f_t(u))(d\chi)=1,\quad f_t(0)=\delta(\delta([[0,\ldots,0],t])),\quad u\geqq 0,\quad t\in K,$$

erfüllt ist.

Wir zeigen nun, daß für alle u, $w\geqq 0$ die Beziehung $(f_t(u)[f_{(.)}(w)]=f_t(u+w)$, $t\in K$, gültig ist.

Mit Hilfe von $\otimes$ erhalten wir für alle t in K

$$\oplus\; f_t(u+w)-(f_t(u))[f_{(.)}(w)]$$

$$=(1-F_t(u+w))\delta(\delta([[0,\ldots,0],t+u+w]))+\int_0^{u+w}(W[f_0(u+w-v)])(.)dF_t(v)$$

$$=(1-F_t(u))f_{t+u}(w)-(\int_0^u(W[f_0(u-v)])(.)dF_t(v))[f_0(w)].$$

Nun ist aber

$$(\circ)\qquad 1-F_t(u+w)=\frac{1-F(t+u+w)}{1-F(t)}=\frac{1-F(t+u)}{1-F(t)}\cdot\frac{1-F(t+u+w)}{1-F(u+t)}$$

$$=(1-F_t(u))(1-F_{t+u}(w)).$$

Ferner gilt

$$(++)\qquad \int_0^{u+w}(W[f_0(u+w-v)])(.)dF_t(v)=(1-F(t))^{-1}\int_t^{t+u+w}(W[f_0(t+u$$

$$+w-v)])(.)dF(v)=(1-F(t))^{-1}\int_t^{t+u}(W[f_0(t+u$$

$$+w-v)])(.)dF(v)+(1-F(t))^{-1}\int_{t+u}^{t+u+w}(W[f_0(t+u+w-v)])(.)dF(v)$$

$$=(1-F(t))^{-1}\int_t^{t+u}(W[f_0(t+u+w-v)])(.)dF(v)$$

$$+(1-F(t))^{-1}(1-F(t+u))\int_0^w(W[f_0(w-v)])(.)dF_{t+u}(v)$$

$$=\int_0^u(W[f_0(u+w-v)])(.)dF_t(v)+(1-F_t(u)\int_0^w(W[f_0(w-v)])(.)dF_{t+u}(v).$$

Mit Hilfe von $\otimes$ und $(\circ)$ erhalten wir die Gleichungskette

$$(+++)\qquad (1-F_t(u))f_{t+u}(w)=(1-F_t(u))((1$$

$$-F_{t+u}(w))\delta(\delta[[0,\ldots,0],t+u+w])+\int_0^w(W[f_0(w-v)])(.)dF_{t+u}(v))$$

$$=(1-F_t(u+w))\delta(\delta[[0,\ldots,0],\ t+u+w])$$
$$+(1-F_t(u))\int_0^w (W[f_0(w-v)])(\,.\,)dF_{t+u}(v)).$$

Setzt man $(++)$ und $(+++)$ in $(+)$ ein und benutzt man die Abschätzung 4.2.7 aus [8], so ergibt sich

$$\|f_t(u+w)-(f_t(u)[f_{(.)}(w)]\|$$
$$\leqq \int_0^u \|W[f_0(u+w-v)]-(W[f_0(u-v)])[f_0(w)]\|\,dF_t(v)$$
$$\leqq \int_0^u (\int \|[f_0(u+w-v)]_{(a)}-[(f_0(u-v))[f_0(w)]]_{(a)}\|\,\Lambda(W,da))dF_t(v)$$
$$=\int_0^u \|f_0(u+w-v)-(f_0(u-v))[f_{(.)}(w)]\|\,dF_t(v).$$

Setzen wir zur Abkürzung $s_t(u,w)=\|f_t(u+w)-(f_t(u)[f_{(.)}(w)]\|$ an, so erhalten wir

$$s_t(u,w)\leqq \int_0^u s_0(u-v,w)dF_t(v)=(s_0((\,.\,),w)*F_t(u).$$

Für alle natürlichen Zahlen n erhalten wir somit $s_t(u,w)\leqq(s_0((\,.\,),w)*F_t^{*n}(u)$ d. h. es gilt $s_t(u,w)=0$ $(t\in K,\ u\geqq 0,\ w\geqq 0)$.

7. Es bleibt nur nach zu zeigen, daß die Abbildung $[u,t]\to f_t(u)$ von $[0,+\infty)\times K$ in $\mathbf{P}$ schwach stetig ist.

Wir wissen bereits, daß die Abbildung $f_0(\,.\,)$ von $[0,+\infty)$ in $\mathbf{P}$ schwach stetig ist. Es gelte nun $u_n\to u$, $t_n\to t$, $n\to\infty$. Wir erhalten mit Hilfe von $\otimes$ für alle bezüglich der vagen Topologie stetigen beschränkten reellen Funktionen h auf M und alle $\varepsilon>0$

$$\limsup_{n\to\infty}|\int h(\chi)(f_{t_n}(u_n))(d\chi)-\int h(\chi)(f_t(u))(d\chi)|$$
$$\leqq \limsup_{n\to\infty}|(1-F_{t_n}(u_n))h(\delta(\delta([[0,\ldots,0],\ t_n+u_n])))$$
$$+(1-F_t(u))h(\delta(\delta([[0,\ldots,0],\ t+u])))|$$
$$+\limsup_{n\to\infty}|(1-F(t_n))^{-1}\int_{t_n}^{t_n+u_n}(\int h(\chi)(W[f_0(t_n+u_n-v)])(d\chi))dF(v)$$
$$-(1-F(t))^{-1}\int_t^{t+u}(\int h(\chi)(W[f_0(t+u-v)])(d\chi))dF(v)|$$
$$\leqq \limsup_{n\to\infty}(1-F(t))^{-1}\int_t^{t+u}|\int h(\chi)(W[f_0(t_n+u_n-v)])(d\chi)$$
$$-\int h(\chi)W[f_0(t+u-v)]\,|\,dF(v)$$
$$+(1-F(t))^{-1}\sup_{\chi\in M}|h(\chi)|(F(t)-F(t-\varepsilon)+F(t+u+\varepsilon)-F(t+u))$$
$$=(1-F(t))^{-1}\sup_{\chi\in M}|h(\chi)|(F(t)=F(t+\varepsilon)+F(t+u+\varepsilon)-F(t+u)).$$

Da F voraussetzungsgemäß stetig ist, strebt die rechte Seite für $\varepsilon \to 0+$ gegen Null.

3. Grundeigenschaften der Verzweigungshalbgruppe $(D^{\langle\cdot\rangle}_{(t)}, t \in K)$. Wie im vorigen Kapitel setzen wir zur Abkürzung $z_{u,t} = D^{\langle u\rangle}_{(t)}(\chi \neq 0)$ für alle $t \in K$, $u \geqq 0$ an. Da $z_{u,t}$ bei festem t monoton fallend von u abhängt, existiert für $u \to \infty$ ein Grenzwert $z_{\infty,t}$.

Der folgende Satz ist im Prinzip eine elementare Aussage über Bellman-Harris-Prozesse, den wir aber der Vollständigkeit halber beweisen wollen.

3.1. Satz. *Gilt* $V(\chi(R^s) = 1) < 1$, *so genügt die kritische räumlich homogene Verzweigungshalbgruppe* $(D^{\langle\cdot\rangle}_{(t)}, t \in K$ *der Bedingung* d_1).

Beweis. Mit Hilfe der Integralgleichung ⊗ erhalten wir

$$z_{\infty,0} = \lim_{n\to\infty} \int_0^u \left(\int (1-(1-z_{u-v,0})^{\chi(R^S)}) V(d\chi) \right) dF(v)$$

$$= \lim_{w\to\infty} \int (1-(1-z_{w,0})^{\chi(R^S)}) V(d\chi) = \int (1-(1-z_{\infty,0})^{\chi(R^{S'})}) V(d\chi)$$

d. h. es gilt $1 - z_{\infty,0} = \int (1-z_{\infty,0})^{\chi(R^S)} V(d\chi)$. Offenbar ist $z_{\infty,0} = 0$ eine Lösung dieser Gleichung. Wir zeigen nun, daß dies die einzige Lösung ist. Es ist offenbar äquivalent zu zeigen, daß die einzige Lösung der Gleichung

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$$

$s = 1$ ist. Hierbei setzen wir $s = 1 - z_{\infty,0}$. Sei nun r eine weitere Lösung der Gleichung mit $0 \leqq r < 1$. Wir erhalten

$$1 - r = (1-r)p_1 + (1-r^2)p_2 + (1-r^3)p_3 + \ldots$$

und damit

$$1 = p_1 + (1+r)p_2 + (1+r+r^2)p_3 + \ldots + (1+r+\ldots+r^{n-1})p_n + \ldots$$
$$< p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + np_n + \ldots = 1.$$

Die letzte strenge Ungleichung ergibt sich auf Grund der Annahme $r < 1$ und wegen der Tatsache, daß mindestens ein $p_k > 0$, $k = 2, 3, \ldots$, ist. Denn die Annahme $p_2 = p_3 = \ldots = p_n = \ldots = 0$ führt uns offenbar zu $p_1 = V(\chi(R^s) = 1) = 1$. Der Widerspruch beweist die Eindeutigkeit der Lösung.

Durch erneute Anwendung von ⊗ kann auf $z_{\infty,t} = 0$, $t \in K$, geschlossen werden.

Die Frage nach der Gültigkeit der Bedingung d_3) für $(D^{\langle u\rangle}_{(t)}, t \in K)$ läßt sich erschöpfend beantworten:

3.2. Satz. *Es existiert genau dann ein Verteilungsgesetz* τ *auf* $\mathfrak{N}$ *mit der Eigenschaft* $p(\omega_{D^{\langle u\rangle}}) * \tau = \tau$, *falls* $\Delta_F = \int_0^\infty t\,dF(t) < +\infty$ *gilt. In diesem Falle ist* τ *eindeutig bestimmt und zwar besitzt* τ *bezüglich des Lebesgueschen Maßes auf der positiven Halbachse die Dichte* $(\Delta_F)^{-1}(1-F(t))$.

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir $p(\omega_{D^{\langle u\rangle}})(0, (.)) = \gamma_u$. Mit Hilfe von Satz 4.2.2 aus [8] und der Integralgleichung ⊗ erhalten wir nun $\gamma_n = (1 - F(u))\delta_u + \int_0^u \gamma_{u-v}(.)\,dF(v)$ für alle $u \geqq 0$. Mit den bereits mehrfach angewandten Schlüssen erkennt man leicht, daß diese Integralgleichung für $\gamma(\diagdown)$ höchstens eine Lösung besitzt. Bezeichnen wir nun die zu F gehörende Erneuerungsfunktion mit H_F, so erkennen wir mit dem elementaren Formelapparat der Erneuerungstheorie, daß

$$\sigma_u = (1-F(u))\delta_u + \int_0^u \delta_{u-v}(\,.\,)(1-F(u-v))H_Z(dv)$$

die obige Integralgleichung löst und daher mit γ_u übereinstimmt oder mit anderen Worten: γ_u ist die „Altersverteilung" in einem mit der Anfangsverteilung $\delta(0)$ im Nullpunkt startenden Erneuerungsprozess im Zeitpunkt u.

Nochmalige Anwendung von $\otimes$ und Satz 4.2.2. in [8] führt uns nun für alle $t \in K$, $u \geqq 0$, auf

$$p(\omega_{D^{\langle u\rangle}})(t, (\,.\,)) = (1-F_t(u))\delta(t+u) + \int_0^u \gamma_{u-v}(\,.\,)F_t(dv)$$

d. h. wir erkennen: Für alle $t \in K$, $u \geqq 0$ ist $p(\omega_{D^{\langle u\rangle}})(t, (\,.\,))$ die Übergangsverteilung im zu F gehörenden Erneuerungsprozess zum Zeitinterval u und zum Anfangspunkt t.

Ein Verteilungsgesetz τ auf $\mathfrak{K}$ genügt somit genau dann der Bedingung $p(\omega^{\langle u\rangle}_{(\cdot)}) * \tau = \tau$, $u \geqq 0$, wenn es eine stationäre Anfangsverteilung des zu F gehörenden Erneuerungsprozesses ist.

Es verbleibt nur noch die Frage nach der Gültigkeit der Bedingung d_2) für $(D^{\langle\cdot\rangle}_{(t)}, t \in K)$.

3.3. Theorem. *Die räumlich homogene Verzweigungshalbgruppe* $(D^{\langle\cdot\rangle}_{(t)}$, $t \in K)$ *genügt der Bedingung* d_2), *falls die Verteilungsfunktion F absolut stetig und das Verteilungsgesetz* $\Lambda(V)$ *nichtgitterförmig ist.*

Beweis. 1. Unmittelbar aus der Integralgleichung $\otimes$ erhalten wir für alle $u \geqq 0$ und alle t aus K

$$\Lambda(D^{\langle u\rangle}_{(t)}) \geqq \int_0^u \Lambda(W[D^{\langle u-v\rangle}_{(0)}], (\,.\,))dF_t(v)$$

$$= \int_0^u (\int \Lambda([D^{\langle u-v\rangle}_{(0)}]_{(x)}(\,.\,))\Lambda(V, (dx)))dF_t(v)$$

$$= \int_0^u (\int \Lambda(D^{\langle u-v\rangle}_{(0)}, ((\,.\,)-x))\Lambda(V, (dx)))dF_t(v).$$

Setzen wir nun zur Abkürzung für alle L in $\mathfrak{K}$ und alle Maße H auf $\mathfrak{M}$ $\Lambda^L(H) = \Lambda(H, ((\,.\,)\times L))$ an, so ergibt sich

$$\Lambda^L(D^{\langle u\rangle}_{(t)}) \geqq \int_0^n ((\Lambda^L(D^{\langle u-v\rangle}_{(0)})) * (\Lambda(V)))(\,.\,)dF_t(v)$$

$$= \Lambda(V) * \int_0^u (\Lambda^L(D^{\langle u-v\rangle}_{(0)}))(\,.\,)dF_t(v).$$

Hieraus folgt durch Einsetzen in den Integranden

$$\Lambda^L(D^{\langle u\rangle}_{(t)}) \geqq (\Lambda(V)) * (\int_0^u (\Lambda(V)) * (\int_0^{u-v} \Lambda^L(D^{\langle u-v-w\rangle})dF(w))dF_t(v))$$

$$=(\Lambda^2(V))*(\int_0^u(\int_0^{u-v}\Lambda^L(D_{(0)}^{\langle u-v-w\rangle},(.))dF(w))dF_t(v)$$

$$=\Lambda^2(V)*\int_0^u \Lambda^L(D_{(0)}^{\langle u-v\rangle},(.))d(F*F_t(v)).$$

Diese Einsetzung läßt sich iterieren und führt uns schließlich für alle natürlichen Zahlen n auf die Ungleichung

$$\Lambda^L(D_{(t)}^{\langle u\rangle})\geqq\Lambda^n(V)*\int_0^u \Lambda^L(D_{(0)}^{\langle u-v\rangle},(.))d(F^{*(n-1)}*F_t)(t),$$

d.h. es gilt für alle $u\geqq 0$ und alle t aus K

$$\Lambda(D_{(t)}^{\langle u\rangle})\geqq\int_0^u(\int\Lambda([D_{(0)}^{\langle u-v\rangle}]_{(x)},(.))\Lambda^n(V,(dx))d(F_t*F^{*(n-1)})(v).$$

2. Offenbar gilt für alle $n=1,2,\ldots$ und alle t aus K

$$\Lambda(D_{(t)}^{\langle u\rangle},A)-\int_0^u(\int\Lambda([D_{(0)}^{\langle u-v\rangle}]_{(x)},A)\Lambda^n(V,(dx)))d(F_t*F^{*(n-1)})(v)$$

$$=1-\int_0^u 1.d(F_t*F^{*(n-1)})(v)=1-(F_t*F^{*(n-1)})(u)\to 0,\quad u\to\infty.$$

3. Es seien nun σ_1, σ_2 bezüglich μ absolut stetige Verteilungsgesetze auf $\mathfrak{R}^s$ und t, l irgendwelche Punkte aus K. Gestützt auf 1. und 2. erhalten wir für alle natürlichen Zahlen n für $u\to\infty$

$$\|\omega_{D_{(t)}^{\langle u\rangle}}*(\sigma_1\otimes\delta_t)-\omega_{D_{(l)}^{\langle u\rangle}}*(\sigma_2\otimes\delta_l)\|$$

$$=\|\int\Lambda([D_{(t)}^{\langle u\rangle}]_{(x)},(.))\sigma_1(dx)-\int\Lambda([D_{(l)}^{\langle u\rangle}]_{(x)}(.))\sigma_2(dx)\|$$

$$\leqq\mathfrak{o}(1)+\|\int_0^u(\int\Lambda([D_{(0)}^{\langle u-v\rangle}]_{(x)},(.))(\sigma_1*\Lambda^n(V))(dx))d(F_t*F^{*(n-1)})(v)$$

$$-\int_0^u(\int(\Lambda([D_{(0)}^{\langle u-v\rangle}]_{(x)},(.))(\sigma_2*\Lambda^n(V))(dx))d(F_l*F^{*(n-1)})(v)\|$$

$$\leqq\mathfrak{o}(1)+\|\int_0^u(\int\Lambda[D_{(0)}^{\langle u-v\rangle}]_{(x)},(.))(\sigma_1*\Lambda^n(V))(dx))d(F_t*F^{*(n-1)})(v)$$

$$-\int_0^u(\int\Lambda([D_{(0)}^{\langle u-v\rangle}]_{(x)}(.))(\sigma_2*\Lambda^n(V))(dx))d(F_t*F^{*(n-1)})(v)\|$$

$$+\|\int_0^u(\int\Lambda([D_{(0)}^{\langle u-v\rangle}]_{(x)},(.))(\sigma_2*\Lambda^n(V))(dx))d(F_t*F^{*(n-1)})(v)$$

$$-\int_0^u(\int\Lambda([D_{(0)}^{\langle u-v\rangle}]_{(x)},(.))(\sigma_2*\Lambda^n(V))(dx))d(F_l*F^{*(n-1)})(v)\|$$

$$\leqq o(1)+\int_0^u \| \int \Lambda([D_{(0)}^{\langle u-v\rangle}]_{(x)}, (\,.\,))(\sigma_1 * \Lambda^n(V))(dx)$$

$$-\int \Lambda([D_{(0)}^{\langle u-v\rangle}]_{(x)}, (\,.\,))(\sigma_2 * \Lambda^n(V))(dx) \| \, d(F_l * F^{*(n-1)})(v)$$

$$+\int \| \int_0^u \Lambda([D_{(0)}^{\langle u-v\rangle}], (\,.\,)) d(F_l * F^{*(n-1)})(v)$$

$$-\int_0^u \Lambda([D_{(0)}^{\langle u-v\rangle}], (\,.\,)) d(F_t * F^{*(n-1)})(v) \| (\sigma_2 * \Lambda^n(V))(dx)$$

$$\leqq o(1)+\int_0^u \| \sigma_1 * \Lambda^n(V) - \sigma_2 * \Lambda^n(V) \| \, d(F_t * F^{*(n-1)})(v)$$

$$+\int \| F_l * F^{*(n-1)} - F_t * F^{*(n-1)} \| (\sigma_2 * \Lambda^n(V))(dx)$$

$$\leqq o(1)+\| \sigma_1 * \Lambda^n(V) - \sigma_2 * \Lambda^n(V) \| + \| F_l * F^{*(n-1)} - F_t * F^{*(n-1)} \|,$$

wobei wir unter der Norm der Differenz von Verteilungsfunktionen den Variationsabstand der zugehörigen Verteilungsgesetze verstehen. Auf Grund unserer Voraussetzung über $\Lambda(V)$ und F streben der zweite und der dritte Term auf der rechten Seite gegen Null (vgl. Abschnitt 11.10 in [8]).

4. Konvergenz- und Darstellungssätze. Unmittelbar aus 1.6, 1.7, 3.1, 3.2 und 3.3 ergibt sich

4.1. Theorem. *Ist F absolut stetig, $\Lambda(V)$ nichtgitterförmig, $V(\chi(R^s)=1)<1$ und $\int_0^\infty x dF(x) < +\infty$, so erfüllt die gemäß* 2.1 *eingeführte kritische räumlich homogene Verzweigungshalbgruppe $D^{\langle\cdot\rangle}$ die Bedingungen* d_1), d_2), d_3), d_4). *Ist sie überdies stabil, so vermittelt $\sigma \to \int]D^{\langle\cdot\rangle}[^l(\,.\,)\sigma(dl)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge aller Verteilungsgesetze σ zufälliger nichtnegativer reeller Zahlen auf der Menge aller bezüglich sämtlicher homogenen Schauerfelder $[D^{\langle u\rangle}]$, $u \geqq 0$, schauerinvarianten stationären Verteilungsgesetze auf $\mathfrak{M}$.*

4.2. Satz. *Unter den Voraussetzungen von* 4.1 *gilt* $\Lambda(]D^{\langle\cdot\rangle}[\,) = \mu \circledast \gamma$ *mit* $\nu = (\Delta_F)^{-1} \int_{(\cdot)} (1-F(z))\mu(dz)$.

4.3. Theorem. *Unter den Voraussetzungen von* 4.1 *gilt für alle Verteilungsgesetze L aus* **S** *und alle endlichen Folgen $X_1, \ldots, X_m$ von Mengen aus* $\mathfrak{B}$

$$\sup_{x \in R^s} \| L[D^{\langle u\rangle}] - \int]D^{\langle\cdot\rangle}[^l \sigma(dl) \|_{X_1+x, \ldots, X_m+x} \xrightarrow[u\to\infty]{} 0.$$

Dankbarkeit. Der Autor dankt Prof. Dr. K. Matthes für die Problemstellung und die wertvollen Diskussionen.

LITERATUR

1. P. Billingsley. Convergence of Probability Measure. New York, 1968.
2. J. L. Doob. Renewal theory from the point of view of the theory of probability. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66**. 1948, 422—438.
3. K. Fleischmann. A continuity theorem for clustering. *Litovsk. Mat. Sb.*, **19**, 1979, No 1, 187—196.

4. T. E. Harris. The Theory of Branching Processes. Berlin, 1963.
5. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке. Безгранично делимые точечные процессы. Москва, 1982.
6. J. Kerstan, K. Matthes, U. Prehn. Verallgemeinerung eines Satzes von Dobruschin II. *Math. Nachr.*. 51, 1971, 149—188.
7. A. Liemant. Kritische Verzweigungsprozesse mit allgemeinem Phasenraum I. *Math. Nachr.*, 96, 1980, 119—124.
8. K. Matthes, J. Kerstan, J. Mecke. Infinitely Divisible Point Processes. Chichester, 1978.
9. G. Tschobanow. Räumlich homogene kritische Verzweigungsprozesse mit beliebigem Markenraum. *Pliska*, 7, 1983, 34—54.

Centre for Mathematics and Mechanics
1090 Sofia P. O. Box 373

Eingegangen am 5. 12. 1980