PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С МАРКОВСКИМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ И ОБСЛУЖИВАНИЕМ В РЕЖИМЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССОРА

МИТКО Ц. ДИМИТРОВ

Изучена однолинейная система типа $M/M/1$ с марковским входящим потоком в режиме разделения процессора. Находятся первые два момента времени обслуживания требования с приведенным временем обслуживания x и их асимптотическое поведение при $x\to\infty$ $x\to 0$.

1. Постановка задачи. Пусть дана однолинейния система массового обслуживания. Приведенное время обслуживания распределено по показательному закону с параметром μ. Если в системе находятся k требований, то интенсивность входящего потока требований равна λ_k и $\lambda_k>0$ при $k=\overline{0, n-1}$, $\lambda_n=0$. Частным случаем системы с марковским входящим потоком является замкнутая система массового обслуживания, для которой $\lambda_k=(n-k)\lambda$, $k=\overline{0, n}$. Каждое поступившее требование принимается сразу на обслуживание. Требования обслуживаются в режиме разделения процессора (см. [1]).

2. Основные результаты. Через $\nu(t)$ обозначим число требований в системе. Из того, что входящий поток является марковским и приведенное время обслуживания распределено по показательному закону, следует, что $\nu(t)$ — это процесс гибели и размножения с конечным числом состояний $0, 1, 2,\dots, n$ и интенсивностями перехода λ_k, $\mu_k=\mu$. Вероятности состояний процесса $\nu(t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dP_i(t)}{dt}=-(\lambda_i+\mu)P_i(t)+\lambda_{i-1}P_{i-1}(t)+\mu P_{i+1}(t),\ i=\overline{0, n},$$

где $P_{-1}(t)=P_{n+1}(t)\equiv 0$.

Тогда стационарное распределение процесса $\nu(t)$ имеет вид

$$P_i=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu^i}\Big[\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu^i}\Big]^{-1}. \tag{1}$$

Время обслуживания требования $\tau(x)$ с приведенным временем обслуживания в стационарном режиме зависит от числа обслуживаемых требований в момент его поступления и $\tau(x)=\Sigma_{i=0}^{n-1}\chi_i\tau_i(x)$, где χ_i — индикатор события {в момент поступления рассматриваемого требования число обслуживаемых требований равно i}, $\tau_i(x)$ — время обслуживания требования с приведенным временем обслуживания x, если в момент начала его обслуживания наряду с ним в системе есть еще i других требований. Тогда $\mathsf{E}\tau(x)=\Sigma_{i=0}^{n-1}p_i\mathsf{E}\tau_i(x)$, $\mathsf{E}\tau^2_i(x)=\Sigma_{i=0}^{n-1}p_i\mathsf{E}\tau^2_i(x)$. Найдем $\mathsf{E}\tau^k_i(x)$, $k=1, 2$. Из предположения о том, чем является дисциплина обслуживания разделения процессора, следует, что $\tau_i(x)$ определяется равенством $\int_0^{\tau_i(x)} f[\mu(u)]du = x$, где $\mu(u)$ — процесс рождения и гибели с интенсивностями перехода $\lambda_i' = \lambda_{i+1}$, $\mu_i' = \mu i/(i+1)$, $\mu(0) = i$, а $f(j) = 1/(j+1)$. В [2] для любого однородного марковского процесса с не более, чем счетным числом состояний и интенсивностями перехода σ_{ij} и любой, определенной на состояниях процесса $\xi(u)$ положительной функцией, исследуется интеграл $I_i(t) = \int_0^t f[\xi(u)du$ по траектории марковского процесса $\xi(t)$ и случайная величина $\tau_i(x)$, определяемая равенством $\int_0^{\tau_i(x)} f[\xi(u)]du = x$, где $\xi(0) = i$. Интерес представляет изучение поведения $\tau_i(x)$ и $I(t)$ при $x \to \infty$ и $t \to \infty$. Для этой цели введем следующие обозначения:

$H = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество состояний марковского однородного процесса $\xi(t)$ с конечным числом состояний;

σ_{ij} — интенсивности переходов из состояния i в состояние j процесса $\xi(t)$ и $\sigma_i = \Sigma_{j \neq i} \sigma_{ij}$, $\tau_{ij} = \min(n : \xi_n = j, n \geq 1, \xi_0 = i)$;

$\tau(k, \xi_k)$ — случайная величина с функцией распределения $\mathsf{P}\{\tau(k, \xi_k) < x | \xi_0 = i\} = 1 - e^{-\sigma_i x}$;

$\gamma(k, \xi_k) = f(\xi_k)\tau(k, \xi_k)$.

Совокупность $\mathscr{L} = \{\gamma(k, i), k \geq 0, i \in H\}$ состоит из независимых в совокупности случайных величин, распределения которых не зависят от k, а зависят лишь от i;

$$\lambda_{ij} = \sum_{k=1}^{\tau_{ij}} \gamma(k-1, \xi_{k-1}), \quad \varkappa_{ij} = \sum_{k=1}^{\tau_{ij}} \tau(k-1, \xi_{k-1}),$$

$$c = \frac{\mathsf{E}\lambda_{jj}}{\mathsf{E}\varkappa_{jj}}, \quad \sigma^2 = \frac{\mathsf{E}[\lambda_{jj} - c\varkappa_{jj}]^2}{\mathsf{E}\varkappa_{jj}}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если $\xi(t)$ — марковский однородный эргодический процесс с конечным числом состояний, то $\tau_i(x)$ и $I_i(t)$ асимптотически нормально распределены, т. е.*

$$\lim_{x \to \infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\tau_i(x) - x/c}{\sigma\sqrt{x}/c^{3/2}} < z\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2} du,$$

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\left\{\frac{I_i(t) - ct}{\sigma\sqrt{t}} < z\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2} du,$$

где c и τ определены выше.

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$ — стационарное распределение вложенной цепи Маркова ξ_n процесса $\xi(t)$;

$(P_1, P_2, \ldots, P_m)$ — стационарное распределение процесса (ξt);

$$\lambda_{ij}^+ = \sum_{k=1}^{\tau_{ij}} |\gamma(k-1, \xi_{k-1})|; \quad \pi_{ij}(d) = \sum_{k=1}^{\tau_{ij}} (\gamma(k-1, \xi_{k-1}) - d\tau(k-1, \xi_{k-1}));$$

$$\pi_{ij}^+(d) = \sum_{k=1}^{\tau_{ij}} |\gamma(k-1, \xi_{k-1}) - d\tau(k-1, \xi_{k-1})|;$$

$$\nu(t)=\max\,(n:\sum_{k=1}^{n}\tau(k-1,\ \xi_{k-1})\leqq t);$$

$\nu(i,\ j,\ k)$ — число попаданий в состояние k за время перехода марковской цепи ξ_n из состояния i в состояние j;

$$\xi(\xi_0,\ t)=\sum_{k=1}^{\nu(t)}\gamma(k-1,\ \xi_{k-1}),\quad t\geqq 0.$$

Заметим, что марковский однородный эргодический процесс $\xi(t)$ с конечным числом состояний является полумарковским процессом с вложенной цепью Маркова ξ_n с переходными вероятностями $P_{ij}=\sigma_{ij}/\sigma_i$ и временами пребывания в каждом состоянии i с функцией распределения $1-e^{-\sigma_i x}$. Еще $I_i(t)=\xi(i,\ t)+\zeta(t)$, где

$$\zeta(t)=f\,[\xi(t)]\ [t-\sum_{k=1}^{u}\tau(k-1,\ \xi_{k-1})].$$

Поскольку $\xi(t)$ эргодичен, то существует предел ξ_0 в смысле слабой сходимости величины $\zeta(t)$ при $t\to\infty$ и $\zeta(t)/\sqrt{t}\xrightarrow{P}0$. Для доказательства теоремы осталось проверить выполнимость условия E_4 теоремы 2, с. 101 [3].

Во-первых, $\{\xi_t\}$ — эргодическая цепь.

Во-вторых,

$$\mathsf{E}\varkappa_{jj}=\sum_{k=1}^{m}\mathsf{E}\nu(j,\ j,\ k)\,\mathsf{E}\tau(0,\ k)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\pi_k}{\pi_j}\,\frac{1}{\sigma_k}=\frac{1}{\pi_j}\sum_{k=1}^{m}\frac{\pi_k}{\sigma_k}.$$

В-третьих, $\mathsf{E}\lambda_{jj}^{+}=\mathsf{E}\lambda_{jj}$, так как $\gamma(k,\ \xi_k)=f(\xi_k)\ \tau(k,\ \xi_k)\geqq 0$. Поэтому $\mathsf{E}\lambda_{jj}^{+}=\frac{1}{\pi_j}\ \Sigma_{k=1}^{m}\frac{\pi_k f(k)}{\sigma_k}$.

В-четвертых,

$$\mathsf{E}[\pi_{jj}^{+}(c)]^2=\mathsf{E}[\sum_{k=1}^{\tau_{ij}}|\,(f(\xi_{k-1})\,\tau(k-1,\ \xi_{k-1})-c\tau(k-1,\ \xi_{k-1})\,|\,]^2$$

$$=\mathsf{E}[\sum_{k=1}^{\tau_{ij}}|\,f(\xi_{k-1})-c\,|\,\tau(k-1,\ \xi_{k-1})]^2.$$

В силу следствия 5, из [3, § 2, с. 32] имеем

$$\mathsf{E}[\pi_{jj}^{+}(c)]^2=\sum_{k=1}^{m}\frac{\pi_k}{\pi_j}\,[2\frac{(f(k)-c)^2}{\sigma_k^2}+2\frac{|f(k)-c\,|}{\sigma_k}$$

$$\times(\sum_{r=1}^{m}\mathsf{E}\nu(k,\ j,\ r)\,\frac{|f(r)-c\,|}{\sigma_r}-\frac{|f(k)-c\,|}{\sigma_k})]\leqq K<\infty.$$

Подставив выражения $\mathsf{E}\lambda_{jj}$ и $\mathsf{E}\varkappa_{jj}$ в $c=\mathsf{E}\lambda_{ii}/\mathsf{E}\varkappa_{jj}$, получаем

$$c=[\sum_{k=1}^{m}\frac{\pi_k f(k)}{\sigma_k}]\ [\sum_{k=1}^{m}\frac{\pi_k}{\sigma_k}]^{-1}=\sum_{k=1}^{m}p_k f(k).$$

Из теоремы 2 из [3, с. 101] следует еще, что $\sigma^2 = \mathsf{E}[\lambda_{jj} - c\varkappa_{jj}]^2/\mathsf{E}\lambda_{jj}$ и σ^2 не зависит от j.

Из

$$\mathsf{E}\varkappa_{jj} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\pi_k}{\pi_j} \frac{1}{\sigma_k},$$

$$\mathsf{E}[\lambda_{jj} - c\varkappa_{jj}]^2 = \mathsf{E}[\sum_{k=1}^{\tau_{jj}} f(\xi_{k-1})\tau(k-1,\ \xi_{k-1})$$

$$-c\sum_{k=1}^{\tau_{jj}} \tau(k-1,\ \xi_{k-1})]^2 = \mathsf{E}[\sum_{k=1}^{\tau_{jj}} (f(\xi_{k-1})-c)\tau(k-1,\ \xi_{k-1})]^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m} \frac{\pi_k}{\pi_j}[2\frac{(f(k)-c)^2}{\sigma_k^2} + 2\frac{f(k)-c}{\sigma_k}\cdot(\sum_{r=1}^{m} \mathsf{E}\nu(k,\ j,\ r)\frac{f(r)-c}{\sigma_r} - \frac{f(k)-c}{\sigma_k})]$$

следует выражение для σ^2.

Итак, все условия E_4 теоремы 2 из [3, с. 101] выполнены, откуда следует

$$\lim_{t-\infty} \mathsf{P}\{\frac{I_i(t)-ct}{\sigma\sqrt{t}} < z\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

Теперь рассмотрим равенство $\mathsf{P}\{\tau_i(x)>t\} = \mathsf{P}\{I_i(t)<x\}$. Пусть $x\to\infty$ и $t = x/c + z\sigma\sqrt{x/c}\,\sqrt{c}$. Тогда

$$\mathsf{P}\{\tau_i(x)>t\} = \mathsf{P}\{I_i(t)<x\} = \mathsf{P}\{\frac{I_i(t)-ct}{\sigma\sqrt{t}} < \frac{x-ct}{\sigma\sqrt{t}}\} = F_i(\frac{x-ct}{\sigma\sqrt{t}},\ t). \tag{2}$$

В силу выбора t, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-ct}{\sigma\sqrt{t}} = -z$, т. е. $\forall\varepsilon>0\ \exists N\colon\ \forall x>N,\ -z-\varepsilon \leqq \frac{x-ct}{\sigma\sqrt{t}} \leqq -z+\varepsilon$. Тогда

$$F_i(-z-\varepsilon,\ t) \leqq F_i(\frac{x-ct}{\sigma\sqrt{t}},\ t) \leqq F_i(-z+\varepsilon,\ t). \tag{3}$$

Выше мы доказали, что

$$\lim_{t\to\infty} F_i(-z-\varepsilon,\ t) = \Phi(-z-\varepsilon) \text{ и } \lim_{t\to\infty} F_i(-z+\varepsilon,\ t) = \Phi(-z+\varepsilon).$$

При $t\to\infty$ из (3) получаем

$$\Phi(-z-\varepsilon) \leqq \varliminf_{t\to\infty} F_i(\frac{x-ct}{\sigma\sqrt{t}},\ t) \leqq \varlimsup_{t\to\infty} F_i(\frac{x-ct}{\sigma\sqrt{t}},\ t) \leqq \Phi(-z+\varepsilon).$$

При $\varepsilon\to 0$ находим

$$\varliminf_{t\to\infty} F_i(\frac{x-ct}{\sigma\sqrt{t}},\ t) = \varlimsup_{t\to\infty} F_i(\frac{x-ct}{\sigma\sqrt{t}},\ t) = \Phi(-z). \tag{4}$$

Из (2) и (4) следует

$$\lim_{x\to\infty} \mathsf{P}\{\tau_i(x)>t\} = \lim_{x\to\infty} \mathsf{P}\{\frac{\tau_i(x)-x/c}{\sigma\sqrt{x}/c\sqrt{c}}>z\} = \Phi(-z) = 1-\Phi(z),$$

что и требовалось доказать.

В [2] доказано, что $\varphi_i(t, s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d_x F_i(x, t)$, где $F_i(x, t) = \mathsf{P}\{\tau_i(x)>t\}$, удовлетворяет систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\varphi_i(t, s)}{\partial t} = -sf(i)\varphi_i(t, s) + \Sigma_j \sigma_{ij}\varphi_j(t, s). \tag{5}$$

Поскольку $a_i(x) = \mathsf{E}\,\tau_i(x) = \int_0^\infty F_i(x, t)\, dt$ и $b_i(x) = \mathsf{E}\tau_i^2(x) = 2\int_0^\infty tF_i(x, t)dt$, то $\varphi_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, da_i(x)$ и $\psi_i(s)\int_0^\infty e^{-sx} db_i(x)$ можно найти из (5). Проинтегрировав обе стороны (5) по t от нуля до бесконечности, получаем

$$-1 = -s\, f(i)\varphi_i(s) + \sum_j \sigma_{ij}\varphi_j(s), \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

Умножив (5) на t и проинтегрировав по t от нуля до бесконечности, получаем

$$-\varphi_i(s) = -\frac{1}{2}\, s\, f(i)\psi_i(s) + \sum_j \frac{1}{2}\sigma_{ij}\,\psi_j(s), \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots, m. \tag{7}$$

В нашем случае (6) имеет вид

$$[s+(i+1)\lambda_{i+1}+i\mu]\,\varphi_i(s) - (i+1)\lambda_{i+1}\varphi_{i+1}(s) - i\mu\,\varphi_{i-1}(s) = i+1. \tag{8}$$

Решение $\varphi_i(s)$ системы (8) найдем по формулам Крамера $\varphi_i(s) = \Delta_{n-1,i}(s)/\Delta_{n-1}(s)$, где $\Delta_{n-1}(s)$ — детерминанта, определенная коэффициентами $\varphi_i(s)$, а $\Delta_{n-1,i}(s)$ получается из $\Delta_{n-}(s)$ заменой его i-ого столбца столбцом $(1, 2, \ldots, n)$ свободных членов системы (8).

Рассмотрим многочлены $\Delta_i(s)$, определенные следующим образом:

$$\Delta_0(s) = s+\lambda_1, \quad \Delta_1(s) = \begin{vmatrix} s+\lambda_1 & -\lambda_1 \\ -\mu & s+2\lambda_2+\mu \end{vmatrix},$$

$$\Delta_i(s) =$$

$$\begin{vmatrix} s+\lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & s+2\lambda_2+\mu & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & -(i-1)\mu & s+i\lambda_i+(i-1)\mu & -i\lambda_i \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -i\mu & s+(i+1)\lambda_{i+1}+i\mu \end{vmatrix}.$$

Теорема 2. *Корни многочленов* $\Delta_i(s)$, $i = \overline{0, n-1}$, *обладают следующими свойствами*:

1) *у многочлена* $\Delta_{n-1}(s)$ $(n-1)$-*простых отрицательных корней: это* $-\alpha_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, *и один нулевой корень* $\alpha_0 = 0$;

2) *корни многочленов* $\Delta_{i-1}(s)$ *и* $\Delta_i(s)$ *чередуются*, $i = \overline{0, n-1}$;

3) *сумма корней многочлена* $\Delta_{n-1}(s)$ *равна* $-(\Sigma_{k=1}^{n-1}k\lambda_k+\mu n(n-1)/2)$.

Доказательство. Его проведем методом математической индукции. Заметим, что $\Delta_0(-\lambda_1)=0$, а $\Delta_1(0)=2\lambda_1\lambda_2>0$, $\Delta_1(-\lambda_1)<0$ и $\lim_{s\to-\infty}\Delta_1(s)=\infty$, откуда и следует существование двух простых отрицательных корней x_{11}, x_{12} и $x_{11}<-\lambda_1<x_{12}<0$. Пусть утверждение теоремы 2 справедливо при $i=2k\leq n-2$. У многочленов $\Delta_{2k-1}(s)$ и $\Delta_{2k-2}(s)$ имеются соответственно $2k$ и $2k-1$ простых отрицательных корней и $x_{2k-1,1}<x_{2k-2,1}<x_{2k-1,2}<x_{2k-2,2}<\cdots<x_{2k-2,2k-1}<x_{2k-1,2k}$. Заметим, что $\Delta_i(s)=[s+(i+1)\lambda_{i+1}+i\mu]\Delta_{i-1}(s)-i^2\lambda_i\mu\Delta_{i-2}(s)$ для $i=\overline{0,n-1}$, $\Delta_{-1}(s)=1$, $\Delta_{-2}(s)=0$, $\Delta_i(0)=(i+1)!\lambda_1\ldots\lambda_{i+1}>0$. Тогда $\Delta_{2k+1}(0)>0$ и $\Delta_{2k-2}(x_{2k-1,2l-1})<0$, $\Delta_{2k-1}(x_{2k-1,2l})<0$, $l=\overline{1,k}$. Следовательно, $\Delta_{2k}(x_{2k-1,2l-1})>0$, $\Delta_{2k}(x_{2k-1,2l})<0$, $b=\overline{1,k}$. Отсюда и из $\lim_{s\to-\infty}\Delta_{2k}(s)=-\infty$, $\Delta_{2k}(0)>0$ следует, что у $\Delta_{2k}(s)$ есть $(2k+1)$ простых отрицательных корней. Аналогичным способом можно доказать утверждение 2 теоремы 2 и для нечетных i. Из утверждения 2 теоремы 2 и $\Delta_{n-1}(0)=0$ следует утверждение 1 теоремы 2. Сумма корней многочлена $\Delta_{n-1}(s)$ равна коэффициенту перед s^{n-1}, откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k=-\Big[\sum_{k=1}^{n-1}k\lambda_k+\frac{n(n-1)\mu}{2}\Big].$$

Из теоремы 2, (7) и (8) следует, что

$$\varphi_i(s)=\Delta_{n-1,i}(s)/\Delta_{n-1}(s)=A_{i,0}/s+\sum_{k=1}^{n-1}A_{ik}/s+\alpha_k,$$

$$\psi_i(s)=2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Delta_{n-1,i,k}(s)}{(s+\alpha_k)\prod\limits_{l=0}^{n-1}(s+\alpha_l)}=2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{B_{i,k}^{(k)}}{(s+\alpha_k)^2}$$

$$+2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l\neq k}\frac{B_{i,l}^{(k)}}{\alpha_l-\alpha_k}\Big[\frac{1}{s+\alpha_k}-\frac{1}{s+\alpha_l}\Big],$$

где $A_{i,k}=\Delta_{n-1,i}(-\alpha_k)/\Delta'_{n-1}(-\alpha_k)$, $\Delta_{n-1,i,k}(s)$ получается из $\Delta_{n-1}(s)$ заменой его i-ого столбца столбцом $A_k=(A_{0k}, 2A_{1k}, 3A_{2k},\ldots, nA_{n-1,k})'$ и $B_{i,l}^{(k)}=\Delta_{n-1,i,k}(-\alpha_l)/\Delta'_{n-1}(-\alpha_l)$. По известной формуле обращения преобразования Лапласа находим

$$a'_i(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{sx}\varphi_i(s)ds=A_{i,0}+\sum_{k=1}^{n-1}A_{i,k}e^{-\alpha_k x},$$

$$b'_i(x)=2\Big\{\sum_{k=0}^{n-1}B_{i,k}^{(k)}xe^{-\alpha_k x}+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l\neq k}\frac{B_{i,l}^{(k)}}{\alpha_l-\alpha_k}[e^{-\alpha_k x}-e^{-\alpha_l x}]\Big\}.$$

Отсюда

(9) $$a_i(x)=A_{i,0}x+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_{i,k}}{\alpha_k}(1-e^{\alpha_k x}),$$

(10) $$b_i(x)=B_{i,0}^{(0)}x^2+2\sum_{l=1}^{n-1}\frac{B_{i,l}^{(0)}}{\alpha_l}\Big[x-\frac{1-e^{-\alpha_l x}}{\alpha_l}\Big]$$

$$+2\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{B_{i,k}^{(k)}}{\alpha_k}\left[\frac{1-e^{-\alpha_k x}}{\alpha_k}-xe^{-\alpha_k x}\right]\right.$$

$$\left.+\sum_{l\neq k,0}\frac{B_{i,l}^{(k)}}{\alpha_l-\alpha_k}\left[\frac{1-e^{-\alpha_k x}}{\alpha_k}-\frac{1-e^{-\alpha_l x}}{\alpha_e}\right]+\frac{B_{i,0}^{(k)}}{\alpha_k}\left[x-\frac{1-e^{-\alpha_k x}}{\alpha_k}\right]\right\}.$$

Асимптотическое поведение $a_i(x)$ и $b_i(x)$ при малых и больших x можно получить из (9) и (10).

Действительно, при $x\to\infty$

$$a_i(x)\sim A_{i,0}x+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_{i,k}}{\alpha_k},$$

$$b_i(x)\sim B_{i,0}^{(0)}x^2+2\sum_{l=1}^{n-1}\frac{B_{i,l}^{(0)}}{\alpha_l}\left(x-\frac{1}{\alpha_l}\right)$$

$$+2\sum_{k=1}^{u-1}\left\{\sum_{l\neq 0}\frac{B_{i,l}^{(k)}}{\alpha_k\alpha_l}+\frac{B_{i,0}^{(k)}}{\alpha_k}\left[x-\frac{1}{\alpha_k}\right]\right\},$$

а при $x\to 0$ имеем

$$a_i(x)\sim\sum_{k=0}^{n-1}A_{i,k}x,\quad b_i(x)\sim\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}B_{i,l}^{(k)}x^2.$$

Поскольку $D\tau_i(x)=E\tau_i^2(x)-[E\tau_i(x)]^2$, то из теоремы 1, (9) и (10) следует, что $B_{i,0}^{(0)}=A_{i,0}^2$ и не зависит от i.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ц. Димитров. Однолинейная система массового обслуживания в режиме разделения процессора. *Изв. АН СССР, сер. техн. киберн.*, 1979, № 5, 102—105.
2. М. Ц. Димитров. Однолинейная система M/M/1 с обобщенным динамическим приоритетом. *Сердика*, **6**, 1980, 143—152.
3. Д. С. Сильвестров. Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. Киев, 1971.

Высший экономический институт им. К. Маркса 1156 София

Поступила 24. 12. 1980